Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Tânia Cristina Gonçalves Robalo

Séries hipergeométricas generalizadas no contexto da teoria das funções hipercomplexas

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Tânia Cristina Gonçalves Robalo

Séries hipergeométricas generalizadas no contexto da teoria das funções hipercomplexas

dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente	Prof. Doutor Domingos Moreira Cardoso Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.
vogal	Prof. Doutora Maria Irene Falcão de Carvalho Ribeiro Almeida Falcão Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade do Minho
vogal	Prof. Doutor Helmuth Robert Malonek (Orientador) Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao Professor Doutor Helmuth Robert Malonek pela sua orientação, paciência e apoio ao longo destes dois anos.
Gostaria de deixar uma saudação especial ao meu colega de Mestrado, o Luís, pelas suas sugestões, apoio, amizade e companheirismo.
O meu agradecimento a todos aqueles que acreditaram nas minhas capacidades e me incentivaram a não desistir nos momentos difíceis.
Aos meus pais, pelo apoio e presença constante ao longo destes anos de trabalho.
Aos meus amigos, pelo incentivo e amizade.
Ao Diogo, pela ajuda prestada e sua compreensão pelas minhas ausências.

palavras-chave

Série de Gauss, série hipergeométrica generalizada, série de Appell, polinómios ortogonais, Análise de Clifford, extensão de Cauchy-Kowalewskaya, funções monogénicas.

resumo

O principal objectivo deste trabalho consiste em estudar séries hipergeométricas com uma ou duas variáveis e suas generalizações no contexto da Análise de Clifford.
No primeiro capítulo referimos as definições e resultados essenciais sobre as séries hipergeométricas. São apresentados vários teoremas e identidades fundamentais.
O segundo capítulo é dedicado à relação entre as séries hipergeométricas generalizadas e os polinómios ortogonais clássicos.
No terceiro capítulo referimos alguns fundamentos da Análise de Clifford. Apresentamos o conceito de diferenciabilidade hipercomplexa de funções com valores na Álgebra de Clifford. Mostramos que a classe de funções diferenciáveis hipercomplexas coincide com a classe de funções monogénicas, definidas como soluções de um sistema generalizado de Cauchy-Riemann. Abordamos o produto n-ário que pode ser aplicado para construir a analogia de séries de potências, para que estas gerem funções monogénicas. Finalmente discutimos o conceito da extensão de Cauchy-Kowalewskaya como aplicação para obter, a partir de séries de potências de várias variáveis reais, séries em termos de duas ou mais variáveis totalmente regulares.
No quarto e último capítulo aplicamos os conceitos do capítulo anterior para estudar funções monogénicas, dadas em termos de duas variáveis hipercomplexas conjugadas, isto é, em termos de x e $\bar{x}$. Obtêm-se funções monogénicas e suas séries hipercomplexas correspondentes que permitem uma interpretação como um novo tipo de séries hipergeométricas generalizadas (generalizações da função exponencial e do polinómio associado de Laguerre, entre outras).

keywords

Gauss series, generalized hypergeometric series, Appell series, convergence, differential equation, orthogonal polynomials, Clifford Analysis, Cauchy-Kowalewskaya extension, monogenic functions.

abstract

The main objective of this work consists in studying hypergeometric series with one or two variables and their generalizations in the Clifford Analysis context.
In the first chapter the definitions and the essential results about hypergeometric series are referred. Several theorems and fundamental identities are presented.
The second chapter is about the relations between the generalized hypergeometric series and the classical orthogonal polynomials.
In the third chapter we mention some fundamentals of the Clifford Analysis. We present the hypercomplex differentiability concept of functions with values in a Clifford Algebra. We show that the class of hypercomplex differentiable functions coincides with the class of monogenic functions defined as solutions of a generalized Cauchy- Riemann-system of partial differential equations. We describe an n-nary product that can be applied for constructing the analogue of power series, thereby generating monogenic functions. Finally we explain the concept of Cauchy- Kowalewskaya-extension as application for getting from power series of some real variables, generalized power series in terms of two or more total regular variables.
In the fourth and last chapter we use the concepts of the previous chapter to study monogenic functions, in terms of two hypercomplex variables, that is, in terms of x and $\bar{x}$. We obtain monogenic functions and their corresponding representations as hypercomplex series which allow us an interpretation as a new type of generalized hypergeometric series (generalization of the exponential function and the associated Laguerre polynomials, among others).

Conteúdo

Introdução

O termo "hipergeométrico" (do grego $\upsilon\pi\epsilon\rho$, superior ou além de), foi usado por John Wallis (1616-1703), no seu trabalho *Arithmetica Infinitorum* (1655), para denotar qualquer série que vai para além da série geométrica ordinária

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Em particular, estudou a série

$$1 + a + a(a+1) + a(a+1)(a+2) + \ldots.$$

Durante os seguintes cento e cinquenta anos, muitos outros matemáticos estudaram séries similiares, notavelmente, o suíço L. Euler (1707-1783) que apresentou entre muitos outros resultados, a famosa relação (primeira identidade de Euler)

$$ {}_2F_1[-n, b; c; z] = (1-z)^{c+n-b}\ {}_2F_1[c+n, c-b; c; z],$$

e o teorema, uma extensão do teorema binomial, na forma

$$ {}_2F_1[-n, b; c; 1] = \frac{(c-b)(c-b+1)(c-b+2)\ldots(c-b+n-1)}{c(c+1)(c+2)(c+3)\ldots(c+n-1)}.$$

Durante os seguintes quarenta anos, C. F. Hindenburg (1741-1808) na escola combinatória de Göttingen, empregou muitos esforços em várias extensões complicadas dos teoremas binomial e multinomial. Verificou-se uma alteração dramática, quando em 20 de Janeiro de 1812, C. F. Gauss (1777-1855) entregou o seu famoso artigo *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, diante da *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.* Nele, definiu a série infinita

$$1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \ldots \tag{1}$$

e introduziu a notação $F[a, b; c; z]$. Também provou o seu famoso teorema

$$ {}_2F_1[a, b; c; 1] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} $$

e apresentou relações entre duas ou mais destas séries. Mostrou claramente que estava a considerar ${}_2F_1[a, b; c, z]$ como uma série de quatro variáveis, em lugar de uma série em z. Uma nota apresentada em 10 de Fevereiro de 1812, suscitou uma notável discussão acerca da convergência de tais séries.

Uma das maiores contribuições foi dada por E. E. Kummer (1810-1893), no ano de 1836, que usou pela primeira vez o termo "hipergeométrico", só para as séries do tipo (1). Mostrou que a equação diferencial

$$ z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \{c - (1+a+b)z\}\frac{dy}{dz} - aby = 0, $$

é satisfeita pela série

$$ {}_2F_1[a, b; c; z], $$

e tem no total vinte e quatro soluções similares à série de Gauss. Em 1857, B. Riemann (1826-1866) estendeu esta teoria introduzindo novas funções, as quais de certo modo, são generalizações da série de Gauss. Riemann discutiu a teoria geral da transformação da variável numa equação diferenciável e a sua teoria foi aplicada ao trabalho de Kummer por J. Thomae (1840-1921), que em 1879 descobriu em detalhe as relações entre as vinte e quatro soluções de Kummer.

O trabalho de Riemann foi de tal forma influente, que a comunidade matemática que considerava as séries hipergeométricas, passou a estudá-las quase exclusivamente do ponto de vista das equações diferenciais.

A extensão da série de Gauss parece ter ocorrido pela primeira vez em 1828 no trabalho de Clausen (1801-1885), onde o número de parâmetros foi aumentado. Exemplos de extensões de séries hipergeométricas com várias variáveis encontram-se nos trabalhos de Appell (1855-1930) em 1880 e mais extensivamente no ano de 1926 com Appell e Kampé de Fériet (1893-1982).

Euler mostrou que é válido

$$ {}_2F_1[-n, b; c; z] = \frac{n!}{c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)} \int_0^1 t^{-n+1}(1-t)^{c+n-1}(1-tz)^{-b}dt. $$

A ideia de representar uma função por um integral de contorno com funções Gama sobre a qual a integração se estende, julgamos dever-se a S. Pincherle (1835-1936), que usou contornos de um tipo, que foram influenciados pelo trabalho de Riemann. Este assunto foi desenvolvido extensivamente por R. Mellin (1854-1933) e E. W. Barnes (1874-1953). Em 1907, Barnes publicou o integral de contorno representativo das vinte e quatro séries de Kummer e posteriormente, em 1910, provou o integral análogo ao Teorema de Gauss

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)ds = \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}.$$

Enquanto Euler, Gauss, Riemann e outros grandes matemáticos publicaram artigos importantes e influentes sobre séries hipergeométricas, já nos anos 1846, 1847, 1878 Heine (1821-1881) introduziu uma generalização que hoje é a base das séries q-hipergeométricas. No caso de Heine, a série tem a forma

$$1+\frac{(1-q^a)(1-q^b)}{(1-q)(1-q^c)}z+\frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})(1-q^b)(1-q^{b+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^c)(1-q^{c+1})}z^2+\ldots,\ \text{para } |q|<1.$$

Análogamente à notação de Gauss, Heine usou $\phi(a,b,c,q,z)$ para estas séries.

Todas as teorias das funções especiais, entre elas as séries hipergeométricas, podem ser tratadas através de métodos combinatórios e algébricos, recorrendo aos espaços simétricos de Riemann e aos grupos de Lie (1842-1899) semi-simples (ver [6] e [13]).

A aplicação dos computadores à teoria das séries hipergeométricas, mais especificamente o software matemático simbólico Maple e o pacote Hyp, desenvolvido por C. Krattenthaler (ver [23]), permitem simplificar muitos dos cálculos, os quais se revelavam tediosos.

Neste trabalho apresentamos um estudo das séries hipergeométricas generalizadas passando ao estudo das funções monogénicas. No primeiro capítulo referimos resultados básicos necessários das séries hipergeométricas. Como ponto de partida, analisámos a série de Gauss, introduzida por este autor em 1812, que levou à posterior discussão da sua convergência e ao estudo da equação hipergeométrica, descoberta por Euler em 1769, que a satisfaz. Paralelamente passámos ao estudo das séries hipergeométricas generalizadas que surgiram a partir da extensão do número de parâmetros da série de Gauss. Da análise das séries hipergeométricas surgem várias identidades importantes e teoremas fundamentais. Para finalizar este capítulo, referenciamos as séries de Appell, que se traduzem na generalização da série de Gauss, através do aumento do número de variáveis.

No segundo capítulo, a par da equação hipergeométrica satisfeita pela série de Gauss, procedemos ao estudo da equação diferencial satisfeita pela série hipergeométrica generalizada. Nesta sequência,procuramos a série hipergeométrica que satisfaz uma determinada equação.

Terminamos com os polinómios ortogonais clássicos definidos como soluções de equações diferenciais.

No terceiro capítulo descrevemos um conceito elementar de diferenciabilidade hipercomplexa de funções com valores em $\mathcal{C}l_{0,n}$ definidas num subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $\mathcal{C}l_{0,n}$ é uma Álgebra de Clifford sobre o corpo dos números reais. Usando uma nova estrutura hipercomplexa de $\mathbb{R}^{n+1}$, obtemos uma generalização muito natural da abordagem de Cauchy às funções holomorfas. Por outro lado, mostramos que a classe de funções diferenciáveis hipercomplexas coincide com a classe de funções monogénicas, isto é, solução de um sistema generalizado de Cauchy-Riemann. Indicamos uma generalização elementar da abordagem de Weierstrass para a teoria das funções holomorfas na teoria das funções hipercomplexas. A extensão de Cauchy-Kowalewskaya é usada para exprimir séries de potências generalizadas em termos de variavéis hipercomplexas.

O último capítulo é dedicado às funções monogénicas em termos de duas variáveis hipercomplexas, onde se procede ao estudo dos $P^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} T_s^k x^{k-s} \bar{x}^s$, sua derivada hipercomplexa, e às propriedades dos T_s^k. Em particular, é referenciada a ligação entre a função monomial e a solução fundamental de Cauchy Riemann. As últimas secções referem-se ao estudo dos $P^{(k)}(x)$ para $n = 2$, para qual o uso de uma aproximação directa especial da série de potências pode gerar funções monogénicas.

Capítulo 1

Séries hipergeométricas

Neste capítulo explicamos o conceito das séries hipergeométricas clássicas e referimos algumas das suas propriedades. Apresentamos a definição geral de séries hipergeométricas generalizadas motivada por Gauss, terminando com vários resultados inerentes a estas séries.

1.1 Série de Gauss

Em 1812, Gauss apresentou à *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften* o seu famoso artigo onde considerou a série infinita

$$1+\frac{ab}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}+\dots \tag{1.1}$$

como uma função de $a,\ b,\ c,\ z$. A variável é z, podendo ser real ou complexa; $a,\ b,\ c\ \in \mathcal{F}$ (corpo) são denominados por parâmetros da função onde $c \neq 0,\ -1,\ -2, \dots$, de tal modo que não aparecem factores nulos nos termos dos denominadores da série. Do ponto de vista do artigo de Gauss, a série é frequentemente denominada por série de Gauss. Contudo, uma vez que o caso especial $a = 1$, $b = c$, resulta na série geométrica

$$1+z+z^2+z^3+\dots,$$

esta também é denominada por série hipergeométrica ordinária ou série hipergeométrica de Gauss. Usualmente, é representada por

$${}_2F_1[a,b;c;z].$$

Nesta notação, a série de Gauss torna-se

$$ {}_2F_1[a,b;c;z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n, $$

onde para quaisquer $a \in \mathcal{F}$ e n inteiro não negativo, o **factorial generalizado** ou **símbolo de Pochhammer** é definido da seguinte forma

$$ (a)_n := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ \underbrace{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}_{n \text{ factores}} & \text{se} \quad n = 1,2,\dots \end{cases} $$

onde $(1)_n = n!$. Então

$$ (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{1.2} $$

e

$$ \lim_{n\to\infty} (a)_n = \frac{1}{\Gamma(a)}. $$

Se a é igual a um inteiro negativo $-m$, então

$$ (a)_n = (-m)_n \text{ se } m \geq n $$

e

$$ (a)_n = 0 \qquad \text{se } m < n, $$

de tal forma que $(-4)_4 = (-4)(-3)(-2)(-1) = 24$, mas $(-4)_5 = 0$.

Assim, se qualquer um dos parâmetros a ou b da série de Gauss é igual a zero ou a um inteiro negativo $-n$, a série tem um número finito de termos e reduz-se ao polinómio

$$ {}_2F_1[-n,b;c;z]. $$

Exemplo 1.1.1 *Suponhamos que na série de Gauss $a = -2$, então esta torna-se*

$$ {}_2F_1[-2,b;c;z] = 1 + \frac{(-2)b}{c}\frac{z}{1!} + \frac{(-2)(-1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + 0, $$

que é igual a

$$ {}_2F_1[-2,b;c;z] = 1 - \frac{2bz}{c} + \frac{b(b+1)z^2}{c(c+1)}, $$

uma vez que todos os termos seguintes são nulos.

Mas se c é zero ou um inteiro negativo, a série não é definida, uma vez que termos da série se tornam infinitos.

Lebedev [17] afirma que se os parâmetros a e b são permutados, obtem-se a **propriedade de simetria**

$$F[a,b;c;z] = F[b,a;c;z].$$

Slater [26] apresenta algumas notações alternativas para a série de Gauss, as quais citamos de seguida:
Appell (1926) e Bailey (1935a),

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b & \\ & ;z \\ c & \end{matrix}\right] = {}_2F_1[a,b;c;z],$$

$$F(a,b;c;z) = {}_2F_1[a,b;c;z],$$

Meijer (1935c),

$$\Phi[a,b;c;z] = {}_2F_1[a,b;c;z]/\Gamma(c),$$

MacRobert (1947),

$$E(2;a,b;1;c;-1/z) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}{}_2F_1[a,b;c;z],$$

Meijer (1941a),

$$G_{22}^{12}\left(-z \left| \begin{matrix} -a, & -b \\ & \\ -1, & -c \end{matrix} \right. \right) = -\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)z}{}_2F_1[a,b;c;z],$$

Riemann (1857),

$$P\left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & z \\ 1-c & b & c-a-b & \end{matrix} \right\} = {}_2F_1[a,b;c;z].$$

1.2 Convergência da série de Gauss

O círculo de convergência da série hipergeométrica de Gauss é o círculo unitário $|z| = 1$. O comportamento desta série no seu círculo de convergência foi estudado por Slater [26].

Seja $u_n = \dfrac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}$, então

$$(1+n)(c+n)u_{n+1} = (a+n)(b+n)u_n.$$

O quociente de dois termos sucessivos, u_n e u_{n+1} da série de Gauss é dado por

$$\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}z = \frac{(1+a/n)(1+b/n)}{(1+c/n)(1+1/n)}z,$$

de modo que quando $n \to \infty$, o quociente

$$|u_{n+1}/u_n| \to |z|.$$

Consequentemente, pelo Critério de D'Alembert, a série é convergente para todos os valores de z, reais ou complexos tal que $|z| < 1$, e divergente para todos os valores de z reais ou complexos, tal que $|z| > 1$.

Quando $|z| = 1$,

$$\begin{aligned} |u_{n+1}/u_n| &= \left| \left\{ 1 + \frac{a+b}{n} + O(1/n^2) \right\} \left\{ 1 - \frac{1+c}{n} + O(1/n^2) \right\} \right| \\ &= \left| 1 + \frac{a+b-c-1}{n} + O(1/n^2) \right| \\ &\leq 1 + \{Re(a+b-c-1)/n\} + O(1/n^2). \end{aligned}$$

Assim, quando $z = 1$, pelo Critério de Raabe, a série é convergente se $Re(c-a-b) > 0$, e divergente se $Re(c-a-b) < 0$.

É igualmente divergente quando $Re(c-a-b) = 0$. Neste caso

$$|u_{n+1}/u_n| > 1 - \frac{1}{n} - \frac{C}{n^2},$$

onde C é uma constante.

Quando $|z| = 1$, mas $z \neq 1$, a série é absolutamente convergente quando $Re(c-a-b) > 0$, mas não é absolutamente convergente se

$$-1 < Re(c-a-b) \leq 0,$$

e divergente quando $Re(c-a-b) < -1$. Se $Re(c-a-b) = -1$, são necessários mais testes. Neste caso, temos

$$|u_{n+1}/u_n| = 1 - \frac{Re(a+b-ab+1)}{n^2} + O(1/n^3).$$

Consequentemente a série é convergente se $Re(a+b) > Re(ab)$, e divergente se $Re(a+b) \leq Re(ab)$.

De realçar que

$$\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} \to 0 \text{ quando } n \to \infty, \text{ se } 0 < Re(1+c-a-b) < 1.$$

1.3 Equação de Gauss e outras propriedades diferenciais

Segundo Kummer, a série de Gauss, ${}_2F_1[a,b;c;z]$ para $|z| < 1$, satisfaz uma equação linear diferencial, denominada por **equação de Gauss** ou **equação hipergeométrica**, a qual é dada por

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \{c-(1+a+b)z\}\frac{dy}{dz} - aby = 0, \tag{1.3}$$

onde z é uma variável complexa e a, b, c são parâmetros que podem assumir diversos valores reais ou complexos. A equação foi descoberta por Euler (1769), estudada exaustivamente por Gauss (1812) e Kummer (1836). Esta tem no total vinte e quatro soluções similares à série de Gauss (ver [26]), podendo ser verificada por diferenciação directa da série e consequente substituição na equação diferencial. Para além desta verificação Slater [26], apresenta a prova.

Prova:

Uma forma alternativa de escrever a equação de Gauss é

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + c - 1\right)y = \left(z\frac{d}{dz} + a\right)\left(z\frac{d}{dz} + b\right)y.$$

Substituindo $y = {}_2F_1\left[a, b; c; z\right]$ na equação obtemos

$$\left(z\frac{d}{dz} + a\right) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} (n+a) z^n,$$

e

$$\left(z\frac{d}{dz} + a\right)\left(z\frac{d}{dz} + b\right) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{(c)_n n!} z^n.$$

Análogamente

$$\left(z\frac{d}{dz} + c - 1\right) y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_{n-1} n!} z^n,$$

derivando em relação a z

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + c - 1\right) y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_{n-1} n!} n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{(c)_n n!} z^n \end{aligned}$$

obtemos a mesma série.

■

A equação de Gauss pode ser reescrita

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left\{\frac{c}{z(1-z)} - \frac{1+a+b}{1-z}\right\} \frac{dy}{dz} - \frac{ab}{z(1-z)} y = 0$$

onde podemos observar que 0 e 1 são singularidades regulares. Se escrevermos $\frac{1}{z}$ em vez de z, verificamos que o ∞ é igualmente uma singularidade regular da equação de Gauss.

Para além da equação diferencial, a série de Gauss satisfaz algumas propriedades diferenciais.

Se a série de Gauss é diferenciável termo por termo em z, então segundo [17]

$$\frac{d}{dz}\left\{{}_2F_1\left[a, b; c; z\right]\right\} = \frac{ab}{c} {}_2F_1\left[a+1, b+1; c+1; z\right].$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left\{{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} &= \frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}nz^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(n+1)!}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}n!}z^n
\end{aligned}$$

uma vez que $(a)_{n+1} = a(a+1)\ldots(a+n) = a(a+1)_n$, logo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left\{{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)_n b(b+1)_n}{c(c+1)_n n!}z^n = \frac{ab}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n n!}z^n \\
&= \frac{ab}{c}\,{}_2F_1\left[a+1,b+1;c+1;z\right].
\end{aligned}$$

■

Quando este processo é repetido, vemos que no geral

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\,{}_2F_1\left[a+n,b+n;c+n;z\right],\ n=1,\ 2,\ldots.$$

De acordo com [18] seguem-se outras propriedades diferenciais que podem ser provadas de uma forma semelhante:

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{z^{a+n-1}{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} = (a)_n z^{a-1}{}_2F_1\left[a+n,b;c;z\right], \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dz^n}\left\{z^{c-a+n-1}(1-z)^{a+b-c}{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} = \\
&\qquad = (c-a)_n\ z^{c-a-1}(1-z)^{a+b-c-n}{}_2F_1\left[a-n,b;c;z\right],
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{(1-z)^{a+b-c}{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n}(1-z)^{a+b-c-n}{}_2F_1\left[a,b;c+n;z\right], \tag{1.6}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{z^{c-1}{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} = (c-n)_n\ z^{c-n-1}\ {}_2F_1\left[a,b;c-n;z\right], \tag{1.7}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{(1-z)^{a+n-1}{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} = \frac{(-1)^n(a)_n(c-b)_n(1-z)^{a-1}}{(c)_n}{}_2F_1\left[a+n,b;c+n;z\right], \tag{1.8}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{z^{c-1}(1-z)^{b-c+n}{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} = (c-n)_n\ z^{c-1-n}(1-z)^{b-c}\ {}_2F_1\left[a-n,b;c-n;z\right], \tag{1.9}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{z^{c-1}(1-z)^{a+b-c}{}_2F_1\left[a,b;c;z\right]\right\} = $$
$$= (c-n)_n\ z^{c-1-n}(1-z)^{a+b-c-n}{}_2F_1\left[a-n,b-n;c-n;z\right]. \tag{1.10}$$

1.4 Séries hipergeométricas generalizadas

A ideia de estender o número de parâmetros da série de Gauss parece ter ocorrido pela primeira vez no trabalho de Clausen (1828), que introduziu uma série com três parâmetros numerador e dois parâmetros denominador.

A série formal de potências

$$1+\frac{a_1a_2\ldots a_p}{b_1b_2\ldots b_q}\frac{z}{1!}+\frac{a_1(a_1+1)\ldots a_p(a_p+1)}{b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)\ldots b_q(b_q+1)}\frac{z^2}{2!}+\ldots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n\ldots(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\ldots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{1.11}$$

é denominada por **série generalizada de Gauss** ou **série hipergeométrica generalizada**. Tem p parâmetros numerador $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p \in \mathcal{F}$; q parâmetros denominador $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_q \in \mathcal{F}$ e uma variável z. Qualquer um destes parâmetros pode ser real ou complexo, mas os parâmetros b não podem ser inteiros negativos, o que tornaria a série indefinida. Se qualquer um dos parâmetros a é um inteiro negativo, a série reduz-se a um polinómio. A soma da série, quando existe, é denotada por

$$ {}_pF_q\left[\begin{array}{cc} a_1,\ldots,a_p & \\ & ;z \\ b_1,\ldots,b_q & \end{array}\right] \qquad \text{ou} \qquad {}_pF_q[a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z]. \tag{1.12}$$

De acordo com Slater [26], estas notações podem ser reduzidas para

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((a)_p)_n z^n}{((b)_q)_n n!} = {}_pF_q[(a);(b);z].$$

De igual modo, para um produto de várias funções Gama, escrevemos

$$\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)\ldots\Gamma(a_p)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\ldots\Gamma(b_q)} = \Gamma\left[\begin{array}{c} a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q \end{array}\right] = \Gamma[(a);(b)],$$

onde se deve entender que há sempre p parâmetros a e q parâmetros b, caso não seja mostrado explícitamente.

Se um parâmetro numerador é igual a um parâmetro denominador, este pode ser cancelado, exemplificando-se: ${}_2F_2[a,b;a,c;z] = {}_1F_1[b;c;z]$.

Entendemos por ${}_pF_q[\ldots;cz]$, as séries (1.11) com o factor c^n inserido no n-ésimo coeficiente, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n\ldots(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\ldots(b_q)_n n!}(cz)^n.$$

O caso $p = q = 1$ é denominado por **série hipergeométrica "confluent"** ou **série de Kummer**. Segundo Slater [25] a notação introduzida por Pochhammer (1870) e modificada por Barnes (1908a,b) foi ${}_1F_1[a;b;z]$. Outras notações para a série são: $M(a,b,z)$ usada por Airey and Webb (1918); o símbolo $\Phi(a;b;z)$ introduzido por Humbert (1920); $\overset{\infty}{u}(a,b,z)$ usado por Magnus e Oberhettinger (1948) e o símbolo original usado por Kummer $F(\alpha,\beta,z)$. A série de Kummer pode ser deduzida como um caso especial da série de Gauss, como comprovamos:

$$\lim_{b\to\infty}\{{}_2F_1\,[a,b;c;z/b]\} = M(a,c,z).$$

Exemplo 1.4.1 *A série* $1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$ *pode ser escrita na forma hipergeométrica, notando que* $\frac{1}{n+1} = \frac{(1)_n}{(2)_n}$ *para* $n = 0,1,\ldots$
Assim,

$$1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2+\ldots = {}_2F_1[1,1;2;z].$$

Slater [26] descreve várias notações alternativas para a série hipergeométrica generalizada. Assim, para evitar a dificuldade de restringir os parâmetros b a valores que não sejam negativos, vários autores usam

$${}_p\mathfrak{F}_q[a_1,a_2,\ldots,a_p;b_1,b_2,\ldots,b_q;z] = {}_pF_q[(a);(b);z]/\Gamma[b_1,b_2,\ldots,b_q].$$

Esta forma de série é definida numericamente nos pontos, onde ${}_pF_q[z]$ não é definida. Uma notação alternativa é

$${}_p\Phi_q[a_1,a_2,\ldots,a_p;b_1,b_2,\ldots,b_q;z] = {}_pF_q[(a);(b);z]/\Gamma[b_1,b_2,\ldots,b_q].$$

Várias notações especiais têm sido usadas para representar as formas assimptóticas da série. A mais usada entre elas é

$$E\left(p; a_1, a_2, \ldots, a_p; q; b_1, b_2, \ldots, b_q; -1/z\right) = \Gamma[(a);(b)]_p F_q[(a);(b);z].$$

Esta é a E-função de MacRobert. A mais recente teoria geral tem sido desenvolvida nos termos da G-função de Meijer

$$G^{1}_{p\ \, q^{p}+1}\left(-z \left| \begin{array}{c} 1-a_1, 1-a_2, \ldots, 1-a_p \\ \\ 0, 1-b_1, 1-b_2, \ldots, 1-b_q \end{array} \right. \right) = \Gamma[(a);(b)]_p F_q[(a);(b);z].$$

Como resumo das séries clássicas, Gauss e hipergeométricas generalizadas, referimos a definição geral de uma série hipergeométrica [23].

Definição 1.4.2 *Uma série* $\sum_{n\geq 0} t_n$ *é denominada hipergeométrica se* $t_0 = 1$, *o quociente de dois termos consecutivos for uma função racional em* n, *isto é,* $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{P(n)}{Q(n)}$ *onde* P *e* Q *são polinómios em* n *e a factorização dos polinómios em* n, *for dada por*

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)\ldots(n+b_q)(n+1)}z, \tag{1.13}$$

onde z *é constante.*

Normalizando, ou seja, fazendo $t_0 = 1$, denotamos a série hipergeométrica, cujos termos são os t_n, isto é, a série $\sum_{n\geq 0} t_n$ por (1.12). Ou seja, o primeiro termo é 1 e a razão do (n+1)-ésimo termo e do n-ésimo é dada por (1.13). Torna-se evidente que os exemplos apresentados satisfazem esta relação.

A definição de uma série hipergeométrica foi alargada por Whipple. Este apresentou as denominações: Saalschutzian, bem equilibrada e quase equilibrada.

Definição 1.4.3 *[3] A série hipergeométrica*

$$_{p+1}F_p\left[a_0, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z\right]$$

é denominada por ***k - equilibrada*** *onde k é um inteiro positivo, se $z = 1$; se um dos a_i's é um inteiro negativo e se*

$$k + \sum_{i=0}^{p} a_i = \sum_{i=1}^{p} b_i.$$

No caso $k = 1$ a série é denominada de ***equilibrada ou Saalschützian****.*

Definição 1.4.4 *[3] Se os parâmetros da série hipergeométrica generalizada satisfazem as relações*

$$a_0 + 1 = a_1 + b_1 = \ldots = a_p + b_p,$$

a série designa-se ***bem equilibrada****. Se todos os pares, excepto um dos pares de parâmetros, satisfazem as relações, a série designa-se* ***quase equilibrada****. Uma vez que a ordem dos parâmetros pode ser sempre permutada na série sem a alterar, o par de parâmetros desiguais pode ser sempre trazido para ocupar ou o primeiro ou o último lugar na sequência. Estas séries designam-se por quase equilibradas do primeiro tipo ou do segundo, respectivamente.*

1.5 Convergência das séries hipergeométricas generalizadas

Aplicando o teste do quociente podemos determinar a convergência da série (1.11). Partindo de

$$\begin{aligned}\left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right| &\leq \frac{|a_1+n||a_2+n|\ldots|a_p+n||z|}{|b_1+n||b_2+n|\ldots|b_q+n|(1+n)}\\ &\leq \frac{|z|n^{p-q-1}(1+|a_1|/n))\ldots(1+|a_p|/n)}{(1+1/n)(1+|b_1|/n)\ldots(1+|b_q|/n)}\end{aligned}$$

em [3] temos como consequência imediata os seguintes teoremas:

Teorema 1.5.1 *A série $_pF_q\left[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z\right]$ converge absolutamente para todo o z se $p \leq q$ e para $|z| < 1$ se $p = q+1$, sendo divergente para todo o $z \neq 0$ se $p > q+1$ e se a série for infinita.*

Demonstração:

É evidente que se $p < q$, $|t_{n+1}/t_n| \to 0$ quando $n \to \infty$. Para $p = q+1$, $\lim_{n\to\infty} |t_{n+1}/t_n| = |z|$, e para $p > q+1$, $|t_{n+1}/t_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Isto prova o teorema.

■

Teorema 1.5.2 *A série* ${}_{q+1}F_q\,[a_1, \ldots, a_{q+1}; b_1, \ldots, b_q; z]$ *com* $|z| = 1$ *converge absolutamente se* $Re\,(\sum b_i - \sum a_i) > 0$*. A série converge condicionalmente se* $z = e^{i\theta} \neq 1$ *e* $-1 < Re\,(\sum b_i - \sum a_i) \leq 0$*, sendo divergente se* $Re\,(\sum b_i - \sum a_i) \leq -1$*.*

Demonstração:

O coeficiente do n-ésimo termo em ${}_{q+1}F_q$ é dado por

$$\frac{(a_1)_n \ldots (a_{q+1})_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n n!}.$$

Por (1.2) e pela representação infinitesimal de Euler $\Gamma_n(z) := \dfrac{n^z n!}{(z)_{n+1}}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+x)}{\Gamma(n+y)} n^{y-x} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)} \lim_{n\to\infty} \frac{(x)_n}{(y)_n} n^{y-x} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)} \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)} = 1.$$

O que implica que o n-ésimo termo

$$\sim \frac{\prod \Gamma(b_i)}{\prod \Gamma(a_i)} n^{\sum a - \sum b - 1}$$

quando $n \to \infty$. As afirmações de convergência absoluta e divergência seguem imediatamente. A parte do teorema relativa à convergência condicional pode ser provada pela adição por partes.

■

Exemplo 1.5.3 *A série* ${}_3F_2\,[a, b, c; d, e; z]$ *é convergente se* $|z| < 1$*,*

ou se $z = 1$ *e* $Re\,(d + e - a - b - c) > 0$

ou se $z = -1$ *e* $Re\,(d + e - a - b - c) > -1$*.*

1.6 Identificação de uma série hipergeométrica

O ponto fulcral desta secção passa pela identificação de uma série dada como hipergeométrica da forma ${}_pF_q\left[\ldots\right]$ com base em [23]. Os passos são os seguintes:

1. Dada uma série $F = \sum\limits_n t_n$ devemos alterar o índice n do somatório, de modo que a soma comece em $n = 0$, com um termo diferente de zero. Extrair o factor comum (fc), que é o termo correspondente a $n = 0$, de modo a que o primeiro termo da soma seja 1.

2. Simplificar o quociente t_{n+1}/t_n de modo a ter-se $P(n)/Q(n)$, onde P, Q são polinómios. Caso seja impossível, pela Definição 1.4.2, torna-se evidente que a série não é hipergeométrica.

3. Escrever o quociente na forma

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)\ldots(n+b_q)(n+1)}z.$$

   Se o factor $n+1$ não constar no denominador, devemos colocá-lo e compensar, inserindo um factor extra $n+1$ no numerador.

4. Assim identificamos as séries de entrada. A série hipergeométrica F é:

$$F = (fc)_pF_q\left[a_1, a_2, \ldots, a_p; b_1, b_2, \ldots, b_q; z\right]$$

   O factor comum (fc) extraido em 1, deve ser multiplicado pela série.

Exemplo 1.6.1 *A função de Bessel, para $p \geq 0$ é dada por*

$$J_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}}{n!(n+p)!}.$$

O factor comum é $t_0 = \dfrac{\left(\frac{z}{2}\right)^p}{p!}$ *e o quociente de dois termos consecutivos é*

$$\begin{aligned} \frac{t_{n+1}}{t_n} &= \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+2+p} n!(n+p)!}{(n+1)!(n+p+1)!(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}} \\ &= \frac{-\left(\frac{z^2}{4}\right)}{(n+p+1)(n+1)}. \end{aligned}$$

A série hipergeométrica estandardizada começa com o termo igual a 1. Porém $t_0 \neq 1$, logo devemos multiplicar a série ${}_0F_1$ pelo factor comum (fc). Concluímos que a função de Bessel é realmente hipergeométrica, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$J_p(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^p}{p!} {}_0F_1 \left[p+1; -\frac{z^2}{4}\right]$$

1.7 Teoremas e Identidades fundamentais

Na teoria das séries hipergeométricas são várias as identidades e teoremas fundamentais.

A **primeira identidade de Euler** é dada por

$${}_1F_0[c+n-b; z]\,{}_2F_1[-n, b; c; z] = {}_2F_1[c+n, c-b; c; z] \tag{1.14}$$

ou

$${}_2F_1[-n, b; c; z] = (1-z)^{c+n-b}\,{}_2F_1[c+n, c-b; c; z], \tag{1.15}$$

uma vez que ${}_1F_0[c+n-b; z] = (1-z)^{-(c+n-b)}$.

A demonstração pode ser consultada em [26].

A **fórmula de Clausen** (1828)

$$\left[{}_2F_1\left[a, b; a+b+\frac{1}{2}; z\right]\right]^2 = {}_3F_2\left[2a, 2b, a+b; 2a+2b, a+b+\frac{1}{2}; z\right],$$

onde $|z| < 1$, mostra um exemplo raro do quadrado de uma série hipergeométrica que é expresso numa série hipergeométrica.

Prova:

Pelo Teorema de Cayley (ver [4])

$$(1-z)^{a+b-c}F[2a, 2b; 2c; z] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

então

$$F\left[a, b; c+\frac{1}{2}; z\right] F\left[c-a, c-b; c+\frac{1}{2}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n}{\left(c+\frac{1}{2}\right)_n} a_n z^n. \tag{1.16}$$

Quando $c = a + b$, o Teorema de Cayley torna-se

$$\left[{}_2F_1\left[a, b; a+b+\frac{1}{2}; z\right]\right]^2 = {}_3F_2\left[2a, 2b, a+b; 2a+2b, a+b+\frac{1}{2}; z\right],$$

um resultado que se deve a Clausen.

■

Antes de avançarmos para o estudo dos teoremas apresentamos alguns resultados associados à série binomial e ao símbolo de Pochhammer, que serão necessários nas suas demonstrações.

- Se a for um elemento de $\mathcal{F}$ e P uma série formal de potências, de acordo com Henrici [14], a equação diferencial que define a série binomial é

$$P' = \frac{a}{1+z}P. \tag{1.17}$$

Prova:

Seja $P = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$. A relação funcional dada é equivalente a

$$(1+z)\left(b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + \ldots\right) = a\left(b_0 + b_1 z + \ldots\right).$$

Pelo produto de Cauchy, obtemos

$$b_1 + (2b_2 + b_1)\, z + (3b_3 + 2b_2)\, z^2 + \ldots = ab_0 + ab_1 z + \ldots$$

Comparando os coeficientes, temos

$$nb_n + (n-1)b_{n-1} = ab_{n-1} \Leftrightarrow b_n = \frac{a-n+1}{n} b_{n-1}, \quad n = 1,\ 2, \ldots$$

Segue que $b_n = \dfrac{(a-n+1)\ldots(a-1)a}{n!} b_0 = \dbinom{a}{n} b_0$.
Assim, P satisfaz (1.17) se e só se $P = b_0 B_a$, onde b_0 é o coeficiente de z^0 de P e

$$B_a := 1 + \binom{a}{1} z + \binom{a}{2} z^2 + \ldots$$

é denominada por série binomial em a.

■

- Conforme Henrici [14], para um a arbitrário e b um elemento de $\mathcal{F}$

$$B_a B_b = B_{a+b}. \tag{1.18}$$

Prova:

Seja $P = B_a B_b - B_{a+b}$. Diferenciando P e usando (1.17) obtemos:

$$\begin{aligned} P' &= B'_a B_b + B_a B'_b - B'_{a+b} \\ &= \frac{a}{1+z} B_a B_b + B_a \frac{b}{1+z} B_b - \frac{a+b}{1+z} B_{a+b} \\ &= \frac{1}{1+z}\left[(a+b)\left(B_a B_b - B_{a+b}\right)\right] \\ &= \frac{a+b}{1+z} P. \end{aligned}$$

Como $P = b_0 \left(1 + \dbinom{a+b}{1} z + \dbinom{a+b}{2} z^2 + \ldots\right)$ é proporcional a B_{a+b} ou seja, $P = b_0 B_{a+b}$, então $B_a B_b - B_{a+b} = b_0 B_{a+b}$. A partir do coeficiente de z^0 de P obtemos $b_0 = 0$, pois $1.1 - 1 = b_0 1$. Logo, $P = 0 B_{a+b} = 0$ e por sua vez $B_a B_b = B_{a+b}$.

■

- Para qualquer $b \in \mathcal{F}$ e quaisquer n, k inteiros não negativos tais que $n > k$ e assumindo que $b \neq n-1, n-2, \ldots, n-k$

$$(-b)_{n-k} = \frac{(-b)_n(-n)_k(n-k)!}{n!(b-n+1)_k}. \tag{1.19}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\frac{(-b)_n(-n)_k(n-k)!}{n!(b-n+1)_k} &= \\
&= \frac{(-b)(-b+1)\ldots(-b+n-1)(-n)(-n+1)\ldots(-n+k-1)(n-k)!}{n!(b-n+1)(b-n+2)\ldots(b-n+k)} \\
&= \frac{(-1)^n b(b-1)\ldots(b-n+1)(-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!(b-n+1)\ldots(b-n+k)} \\
&= (-1)^{n+k}\frac{b(b-1)\ldots(b-n+k+1)(b-n+k)\ldots(b-n+1)}{(b-n+1)\ldots(b-n+k)} \\
&= (-1)^{n+k} b(b-1)\ldots(b-n+k+1) \\
&= (-b)(-b+1)\ldots(-b+n-k-1) = (b)_{n-k}.
\end{aligned}$$

■

- Para quaisquer $n,\ k$ inteiros não negativos

$$\frac{1}{(n-k)!} = \frac{(-n)_k(-1)^k}{n!}. \tag{1.20}$$

Prova:

Por definição de coeficiente binomial temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.21}$$

e para qualquer $a \in \mathcal{F}$ e qualquer k inteiro não negativo

$$\begin{aligned}
\binom{a}{k} &= \frac{a!}{(a-k)!k!} = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)(a-k)!}{(a-k)!k!} \\
&= \frac{(-1)^k(-a)(-a+1)\ldots(-a+k-1)}{k!} \\
&= \frac{(-1)^k\,(-a)_k}{k!}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Igualando (1.21) a (1.22) obtemos

$$\frac{1}{(n-k)!} = \frac{(-n)_k(-1)^k}{n!}.$$

■

- Segundo Henrici [14], para qualquer $b \in \mathcal{F}$ e quaisquer n, k inteiros não negativos tais que $n > k$ e assumindo que $b \neq n-1, \ldots, n-k$

$$\binom{b}{n-k} = (-1)^n \frac{(-b)_n}{n!}(-1)^k \frac{(-n)_k}{(b-n+1)_k} \tag{1.23}$$

Prova:

Por (1.22) $\binom{b}{n-k} = (-1)^{n-k}\frac{(-b)_{n-k}}{(n-k)!}$. Então, com o auxílio de (1.19) observa-se que

$$\begin{aligned}\binom{b}{n-k} &= (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\frac{(-b)_n(-n)_k(n-k)!}{n!(b-n+1)_k} \\ &= (-1)^n\frac{(-b)_n}{n!}(-1)^k\frac{(-n)_k}{(b-n+1)_k}.\end{aligned}$$

■

- Para qualquer $a \in \mathcal{F}$ e n inteiro não negativo

$$(a)_n = (-1)^n (-a-n+1)_n\,. \tag{1.24}$$

Prova:

$$(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) = (-1)^n(-a)(-a-1)\ldots(-a-n+1)$$

Mas, $(-a-n+1)_n = (-a-n+1)(-a-n+2)\ldots(-a-1)(-a)$.
Logo, $(a)_n = (-1)^n(-a-n+1)_n$.

■

- Para qualquer $a \in \mathcal{F}$ e quaisquer $n,\ k$ inteiros não negativos

$$(a+2k)_{n-k} = \frac{(a)_{n+k}}{(a)_{2k}}. \tag{1.25}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\frac{(a)_{n+k}}{(a)_{2k}} &= \frac{a(a+1)\dots(a+2k-1)(a+2k)\dots(a+n+k-1)}{a(a+1)\dots(a+2k-1)} \\
&= (a+2k)\dots(a+n+k-1) \\
&= (a+2k)_{n-k}.
\end{aligned}$$

■

- Para qualquer $a \in \mathcal{F}$ e quaisquer n, k inteiros não negativos

$$(a)_{n+k} = (a)_n(a+n)_k = (a)_k(a+k)_n. \tag{1.26}$$

Prova:

$$(a)_n(a+n)_k = a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n)\dots(a+n+k-1) = (a)_{n+k}.$$

$$(a)_k(a+k)_n = a(a+1)\dots(a+k-1)(a+k)\dots(a+k+n-1) = (a)_{n+k}.$$

■

- Para qualquer $a \in \mathcal{F}$ e qualquer k inteiro não negativo

$$(a)_{2k} = 2^{2k}\left(\frac{1}{2}a\right)_k\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)_k \tag{1.27}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
&2^{2k}\left(\frac{1}{2}a\right)_k\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)_k = \\
&\qquad = 2^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^k a(a+2)\dots(a+2k-2)\left(\frac{1}{2}\right)^k (a+1)(a+3)\dots(a+2k-1) \\
&\qquad = a(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+2k-2)(a+2k-1) = (a)_{2k}.
\end{aligned}$$

■

No Teorema de Chu-Vandermonde, um dos parâmetros numerador é um inteiro negativo, sendo ${}_2F_1$ uma soma finita.

Teorema 1.7.1 (Teorema de Chu-Vandermonde) *[26]*

$$ {}_2F_1\left[-n,b;c;1\right]=\frac{(c-b)_n}{(c)_n} $$

Demonstração:

Por definição temos

$$ {}_2F_1[-n,b;c;1]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k(-n)_k}{(c)_k k!}1^k. $$

Calculando o n-ésimo coeficiente de B_aB_b, obtemos

$$ \binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\ldots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}, $$

que pela relação (1.18) é igual a $\binom{a+b}{n}$. Assim, $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}$ e por sua vez, usando (1.22) e (1.23) temos

$$ \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,(-a)_k}{k!}(-1)^n\frac{(-b)_n}{n!}(-1)^k\frac{(-n)_k}{(b-n+1)_k}=\frac{(a+b)!}{(a+b-n)!n!}\Leftrightarrow $$

$$ \Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{(-a)_k(-n)_k}{k!(b-n+1)!}=\frac{(a+b)\ldots(a+b-n+1)}{(-1)^n(-b)_n}\Leftrightarrow $$

$$ \Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{(-a)_k(-n)_k}{k!(b-n+1)!}=\frac{(-a-b)\ldots(-a-b+n-1)}{(-b)_n}\Leftrightarrow $$

$$ \Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{(-a)_k(-n)_k}{k!(b-n+1)!}=\frac{(-a-b)_n}{(-b)_n}. $$

Substituindo $-a$ por b e $b-n+1$ por c obtemos

$$ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k(-n)_k}{k!(c)_k}=\frac{(b-(c+n-1))_n}{(-c-n+1)_n}=\frac{(-(c-b)-n+1)_n}{(-c-n+1)_n}\frac{(-1)^n}{(-1)^n}. $$

Usando (1.24) verificamos que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k(-n)_k}{k!(c)_k}=\frac{(c-b)_n}{(c)_n}$, ou seja

$$ {}_2F_1[-n,b;c;1]=\frac{(c-b)_n}{(c)_n}. $$

■

O primeiro resultado importante para uma série ${}_pF_q$ com $p > 2$ e $q > 1$ é provavelmente o Teorema de Pfaff-Saalschütz. Foi descoberto por Pfaff (1797) e posteriormente redescoberto por Saalschütz (1890). É frequentemente designado por Teorema de Saalschütz cuja nomenclatura não honra Pfaff.

Teorema 1.7.2 (Teorema de Pfaff-Saalschütz) *[14]*

$$ {}_3F_2\left[-n, a, b; c, a+b+1-c-n; 1\right] = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n},\ n = 0, 1, \ldots $$

Demonstração:

Como base para esta demonstração comparamos os coeficientes da primeira identidade de Euler 1.14, substituindo a por $-n$,

$$ {}_1F_0[c-a-b; z]\,{}_2F_1[a, b; c; z] = {}_2F_1[c-a, c-b; c; z]. $$

O coeficiente de z^n no lado esquerdo da identidade é dado por

$$ \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}\frac{(c-a-b)_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(c-a-b)_n}{n!}\,{}_3F_2\left[a, b, -n; c, a+b-c-n+1; 1\right] $$

e no lado direito é

$$ \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n n!}. $$

Assim, igualando os coeficientes de z^n obtemos

$$ {}_3F_2\left[a, b, -n; c, a+b-c-n+1; 1\right] = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}. $$

■

Este resultado apresentado por Pfaff (1797), soma a série

$$ {}_3F_2[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \rho_1, \rho_2; 1] $$

quando $\rho_1 + \rho_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1$ e um dos parâmetros numerador é um inteiro negativo. O teorema reduz-se ao Teorema de Gauss (1813) quando o limite $n \to \infty$.

Teorema 1.7.3 (Teorema de Gauss) *[26]*

$$ {}_2F_1\left[a, b; c; 1\right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \ Re(c-a-b) > 0. $$

Demonstração:

Como base para esta demonstração começamos por provar a relação existente entre três séries de Gauss

$$ \begin{aligned} &(c-a)(c-b)\ {}_2F_1[a, b; c+1; z] \\ &\qquad = c(c-a-b)\ {}_2F_1[a, b; c; z] + ab(1-z)\ {}_2F_1[a+1, b+1, c+1; z], \end{aligned} \tag{1.28} $$

onde $|z| < 1$.
O coeficiente de z^n na direita é

$$ \begin{aligned} &c(c-a-b)\frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(c)_n} + ab\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(1)_n(c+1)_n} - ab\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{(1)_{n-1}(c+1)_{n-1}} \\ &\qquad = \frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(c+1)_n}\left\{(\,c-a-b)(c+n) + (a+n)(b+n) - n(c+n)\right\} \\ &\qquad = \frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(c+1)_n}(c-a)(c-b), \end{aligned} $$

que é igual ao coeficiente de z^n na esquerda de (1.28).
Se $Re(c-a-b) > 0$ e $a,\ b,\ c$ forem diferentes de zero e não forem inteiros negativos, as três séries existem e têm valores finitos. Por isso, se $z \to 1$, vemos que

$$ {}_2F_1[a, b; c; 1] = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)}\ {}_2F_1[a, b; c+1; 1]. $$

Aplicando a fórmula n vezes, temos

$$ {}_2F_1[a, b; c; 1] = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}\ {}_2F_1[a, b; c+n; 1], \tag{1.29} $$

a fórmula de redução de Gauss. Atendendo a (1.2)

$$ \begin{aligned} \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)\Gamma(c-a+n)\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(c+n)\Gamma(c-a-b+n)} \\ &\to \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \end{aligned} $$

quando $n \to \infty$. Também

$$\begin{aligned} |{}_2F_1[a,b;c+n;1]| &\leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(|a|)_m \, (|b|)_m}{m!(n-|c|)_m} \\ &\leq 1 + \frac{|a||b|}{n-|c|} \; {}_2F_1\left[|a|+1, |b|+1; n-|c|+1; 1\right] \\ &\leq 1 + \frac{|a||b|}{n-|c|} M, \end{aligned}$$

para $n > |c|$, onde M é constante, e tende para um quando n tende para infinito.
Na sequência

$$\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n} \; {}_2F_1[a,b;c+n;1] \to \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

quando $n \to \infty$, de modo que por (1.29),

$${}_2F_1[a,b;c;1] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

tendo em conta que $Re(c-a-b) > 0$.

■

No Teorema de Gauss, quando b é um inteiro negativo $-n$, este torna-se no Teorema de Chu-Vandermonde 1.7.1.

Teorema 1.7.4 (Teorema de Kummer) *[26]*

$${}_2F_1[a,b;1+a-b;-1] = \Gamma\left[1+a-b, 1+\frac{1}{2}a; 1+\frac{1}{2}a-b, 1+a\right], \; Re(b) < 1.$$

Demonstração:

Começamos por provar a transformação quadrática de Kummer

$${}_2F_1[a,b;1+a-b;z] = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b; 1+a-b; -4z/(1-z)^2\right], \qquad (1.30)$$

onde $|4z| \leq |1-z|^2$ para que as séries sejam convergentes. Dentro do círculo $|z| < 3-2\sqrt{2}$, as séries podem ser expandidas em potências crescentes de z.
De acordo com [3], a série da direita é dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)_k \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_k}{(1+a-b)_k \, k!} (-4z)^k (1-z)^{-a-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)_k \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_k}{(1+a-b)_k \, k!} (-4z)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a+2k)_j}{j!} z^j.$$

O coeficiente de z^n na última expressão é

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)_k \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_k (-4)^k (a+2k)_{n-k}}{(1+a-b)_k\, k!(n-k)!}. \tag{1.31}$$

Observamos que por (1.25), (1.26) e (1.27)

$$(a+2k)_{n-k} = \frac{(a)_{n+k}}{(a)_{2k}} = \frac{(a)_n (a+n)_k}{2^{2k}\left(\frac{1}{2}a\right)_k \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)_k}$$

e com base em (1.20), constatamos que (1.31) é igual a

$$\frac{(a)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_k (a+n)_k (-n)_k}{(1+a-b)_k \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)_k k!}.$$

Aplicando o Teorema de Pfaff-Saalschütz 1.7.2 verificamos que a série ${}_3F_2$ equilibrada é igual a

$$\frac{(a)_n (1-b-n)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)_n}{n!(1+a-b)_n \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-n\right)_n} = \frac{(a)_n (b)_n}{n!(1+a-b)_n},$$

coeficiente de x^n na esquerda de (1.30).

Pela continuação analítica, este resultado é verdadeiro em todo o lado, dentro do lacete da curva

$$|4z| = |1-z|^2$$

que circunda a origem.

Agora seja $z \to -1$, ponto que fica na curva acima referida, de forma que, pelo Teorema de Abel (ver [27]),

$${}_2F_1[a,b;1+a-b;-1] = 2^{-a}{}_2F_1\left[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b; 1+a-b; 1\right].$$

A série do lado direito pode ser somada pelo Teorema de Gauss 1.7.3, que resulta

$$2^{-a}\Gamma\left[1+a-b, \frac{1}{2}; 1+\frac{1}{2}a-b, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right] = \Gamma\left[1+a-b, 1+\frac{1}{2}a; 1+\frac{1}{2}a-b, 1+a\right],$$

uma vez que $\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}a\right) = 2^{1-a}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(a)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$ e $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Pelo Teorema 1.5.2, as séries hipergeométricas são convergentes, se

$$Re(1-2b) > -1,$$

isto é, $Re(b) < 1$.

Desta forma obtemos o Teorema de Kummer

$${}_2F_1[a,b;1+a-b;-1] = \Gamma\left[1+a-b, 1+\frac{1}{2}a; 1+\frac{1}{2}a-b, 1+a\right],\ Re(b) < 1.$$

■

A série somada por este teorema, é conhecida por série de Kummer, a mais simples série bem equilibrada.

O Teorema de Dixon foi provado pela primeira vez em 1903. Uma demonstração directa deve-se a Watson, baseada na permuta da ordem da adição de uma série dupla, fazendo uso da adição dos Teoremas de Gauss e Kummer. Essa demonstração foi apresentada em detalhe por Bailey, que não será exposta neste trabalho. Porém a seguinte demonstração alternativa deve-se originalmente a Bailey.

Teorema 1.7.5 (Teorema de Dixon) *[26]*

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2[a,b,c;1+a-b,1+a-c;1] = \\
&= \Gamma\left[1+\frac{1}{2}a, 1+\frac{1}{2}a-b-c, 1+a-b, 1+a-c; 1+a, 1+a-b-c, 1+\frac{1}{2}a-b, 1+\frac{1}{2}a-c\right], \\
&\hfill Re(a-2b-2c) > -3.
\end{aligned}
$$

Demonstração:

Começamos por mostrar a seguinte relação entre três séries ${}_3F_2$ Saalschutzian:

$$
\begin{aligned}
&ab(1-z)\ {}_3F_2[a+1,b+1,c;1+a-b,2+a-c;z]+ \\
&\qquad + (a-c+1)(a-2b-2c+2)\ {}_3F_2[a,b,c,1+a-b,1+a-c;z] = \\
&\qquad = (a-2c+2)(a-b-c+1)\ {}_3F_2[a,b,c-1;1+a-b,2+a-c;z]. \quad (1.32)
\end{aligned}
$$

O coeficiente da esquerda é

$$
\begin{aligned}
&ab\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c)_n}{(1+a-b)_n(2+a-c)_n(1)_n} - ab\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}(c)_{n-1}}{(1+a-b)_{n-1}(2+a-c)_{n-1}(1)_{n-1}}+ \\
&\qquad +(a-c+1)(a-2b-2c+2)\frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(1+a-b)_n(1+a-c)_n(1)_n} = \\
&= \frac{(a)_n(b)_n(c-1)_n}{(1+a-b)_n(2+a-c)_n(1)_n}\left\{(a+n)(b+n)(c+n-1)-(a-b+n)(a-c+n+1)n+\right. \\
&\qquad \left.+(a-2b-2c+2)(c+n-1)(1+a-c+n)\right\}/(c-1) = \\
&= (a-2c+2)(a-b-c+1)\frac{(a)_n(b)_n(c-1)_n}{(1+a-b)_n(2+a-c)_n(1)_n},
\end{aligned}
$$

que é igual ao coeficiente na direita de (1.32).

Seja $z \to 1$ na relação anterior. Para as séries serem convergentes, $Re(a-2b-2c) > 0$. Então,

$$\begin{aligned} F &\equiv {}_3F_2[a,b,c;1+a-b,1+a-c;1] \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{2}a-c\right)(1+a-b-c)}{(1+a-c)\left(1+\frac{1}{2}a-b-c\right)}\ {}_3F_2[a,b,c-1;1+a-b,2+a-c;1]. \end{aligned}$$

Agora escrevendo $c-1$ em vez de c, e repetindo o processo n vezes, temos

$$F = \frac{\left(1+\frac{1}{2}a-c\right)_n (1+a-b-c)_n}{(1+a-c)_n\left(1+\frac{1}{2}a-b-c\right)_n}\ {}_3F_2[a,b,c-n;1+a-b,1+a-c+n;1].$$

Quando $n \to \infty$,

$$\frac{(c-n)_r}{(1+a-c+n)_r} \to (-1)^r,$$

de forma que, se $Re(b) < 1$,

$$F = \Gamma\left[1+a-c, 1+\frac{1}{2}a-b-c; 1+\frac{1}{2}a-c, 1+a-b-c\right]\ {}_2F_1[a,b;1+a-b;-1].$$

A série ${}_2F_1[-1]$ pode ser somada pelo Teorema de Kummer 1.7.4. Assim,

$$\begin{aligned} &{}_3F_2[a,b,c;1+a-b,1+a-c;1] = \\ &= \Gamma\left[1+\frac{1}{2}a, 1+\frac{1}{2}a-b-c, 1+a-b, 1+a-c; 1+a, 1+a-b-c, 1+\frac{1}{2}a-b, 1+\frac{1}{2}a-c\right]. \end{aligned}$$

Por continuação analítica, podemos dispensar a condição $Re(b) < 1$, de forma a que o resultado possua a condição de convergência $Re\left(\frac{1}{2}a-b-c\right) > -1 \Leftrightarrow Re(a-2b-2c) > -3$.

■

O Teorema de Dixon apresenta a soma de uma série ${}_3F_2[1]$ bem equilibrada. Em particular, se $c = -n$, o resultado reduz-se a

$${}_3F_2[a,b,-n,1+a-b,1+a+n;1] = \frac{(1+a)_n\left(1+\frac{1}{2}a-b\right)_n}{\left(1+\frac{1}{2}a\right)_n(1+a-b)_n}.$$

Finalmente, quando $c \to -\infty$, o Teorema de Dixon reduz-se ao Teorema de Kummer.

O último resultado no grupo dos teoremas fundamentais é o Teorema de Dougall que apresenta a soma de uma série ${}_7F_6[1]$ bem equilibrada.

Teorema 1.7.6 (Teorema de Dougall) *[26] Se* $1+2a=b+c+d+e-n$

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[a,1+\tfrac{1}{2}a,b,c,d,e,-n;\tfrac{1}{2}a,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a+n;1\right]= \\
&\qquad=\frac{(1+a)_n(1+a-b-c)_n(1+a-b-d)_n(1+a-c-d)_n}{(1+a-b)_n(1+a-c)_n(1+a-d)_n(1+a-b-c-d)_n}. \qquad (1.33)
\end{aligned}
$$

Demonstração:

Substituindo $-n$ por f e tendo em conta (1.2), (1.33) passa a

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[a,1+\tfrac{1}{2}a,b,c,d,e,f;\tfrac{1}{2}a,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f;1\right]= \\
&\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-f)\Gamma(1+a-b-c-d)\Gamma(1+a-b-c-f)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)\Gamma(1+a-b-f)\Gamma(1+a-c-f)}\times \\
&\qquad\qquad\times\frac{\Gamma(1+a-b-d-f)\Gamma(1+a-c-d-f)}{\Gamma(1+a-d-f)\Gamma(1+a-b-c-d-f)}.
\end{aligned}
$$

O resultado é verdadeiro quando $f=0$. Vamos supor que é verdadeiro quando $f= =-1,-2,\ldots,1-n$. As funções Gama, do lado direito, são simétricas em b, c, d e f. Consequentemente, por esta simetria, o resultado é verdadeiro quando $c=0,-1,-2,\ldots,1-n$, e f tem um valor qualquer, e quando $d=0,-1,-2,\ldots,1-n$, e f tem um valor qualquer. Mas,

$$d=1+2a-b-c-e-f.$$

Por conseguinte o resultado também é verdadeiro quando c tem um dos $2n$ valores

$$0,-1,-2,\ldots,1-n,1+2a-b-d-e,1+2a-b-d-e+1,\ldots,1+2a-b-d-e+n-1,$$

e f tem um valor qualquer. Em particular, é verdadeiro quando $f=-n$. Neste caso (1.33) pode ser rescrito como

$$
\begin{aligned}
&(1+a-b)_n(1+a-c)_n(1+a-d)_n(1+a-b-c-d)_n\ {}_7F_6[1] \\
&\quad=(1+a)_n(1+a-b-c)_n(1+a-b-d)_n(1+a-c-d)_n. \qquad (1.34)
\end{aligned}
$$

Esta equação expressa uma igualdade entre dois polinómios em c, ambos de grau $2n$, quando c assume qualquer um dos $2n$ valores anteriores. Vamos supor que em (1.34), $c=a+n$. Este valor não é um dos $2n$ valores, mas um pólo do último termo da série ${}_7F_6$. Podemos conferir que (1.34) se verifica para $c=a+n$, pois visto tratar-se de um pólo, usamos apenas o último termo. Suponhamos que (1.34) é válida para $f=0,-1,-2,\ldots,1-n$ e para $2n+1$ valores c, sendo a equação de grau $2n$ em relação a c. Esta equação também tem de ser satisfeita para todos os valores de c quando $f=-n$. Por indução verifica-se para $f=0$, $f=-1$ e assim sucessivamente até $f=-n$, para todos os valores de c.

■

Para além das identidades e dos teoremas referidos, a segunda identidade de Euler e a identidade de Kummer são de particular interesse.

A **segunda identidade de Euler** [26] é dada por

$$ {}_2F_1[a, c-b; c; z] = (1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left[a, b; c; -\frac{z}{1-z}\right] \quad \text{se } |z| < 1 \ \text{ e } \ Re(z) < \frac{1}{2}. $$

Prova:

A série da direita é dada por

$$ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} (-z)^k (1-z)^{-a-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} (-z)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a+k)_j}{j!} z^j. $$

O coeficiente de z^n na última expressão é

$$ \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k (b)_k (-1)^k (a+k)_{n-k}}{(c)_k k! (n-k)!}. \tag{1.35} $$

Observamos que

$$ \frac{(a)_n}{(a)_k} = \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)(a+k)\dots(a+n-1)}{a(a+1)\dots(a+k-1)} = (a+k)_{n-k}. $$

e por (1.20) $\dfrac{1}{(n-k)!} = \dfrac{(-n)_k(-1)^k}{n!}$. Então (1.35) é igual a

$$ \frac{(a)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(b)_k (-n)_k}{(c)_k k!}. $$

Aplicando o Teorema de Chu-Vandermonde 1.7.1, verificamos que a expressão anterior é igual ao coeficiente da esquerda

$$ \frac{(a)_n (c-b)_n}{n! (c)_n}. $$

■

A **primeira identidade de Kummer** [14] é dada por

$$ {}_0F_0[z]{}_1F_1\left[a; c; -z\right] = {}_1F_1\left[c-a; c; z\right]. $$

Prova:

O primeiro factor é a função exponencial. O coeficiente de z^n, pelo produto de Cauchy, das duas séries formais de potências da esquerda, é dado por

$$ \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k(-1)^k}{(c)_k k!} \frac{1}{(n-k)!} \quad = \quad \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k(-1)^k}{(c)_k} \frac{n!}{k!(n-k)!}. $$

Igualando (1.21) a (1.22) obtemos $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{(-1)^k(-n)_k}{k!}$ e por sua vez

$$ \begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k(-1)^k}{(c)_k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad &= \quad \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k(-1)^k}{(c)_k} \frac{(-1)^k(-n)_k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k(-n)_k}{(c)_k k!} \\ &= \quad \frac{1}{n!} F[a, -n; c; 1]. \end{aligned} $$

Pelo Teorema de Chu-Vandermonde 1.7.1, $\dfrac{1}{n!}F[a, -n; c; 1] = \dfrac{(c-a)_n}{(c)_n n!}$. O resultado é o n-ésimo coeficiente da série da direita.

■

Henrici [14] menciona que numa série hipergeométrica do tipo ${}_pF_q$ quando $q = p + 1$ é válido o seguinte teorema:

Teorema 1.7.7 *Séries do tipo ${}_{p+1}F_p$ podem ser expressas como produtos e quocientes de símbolos de Pochhammer.*

Seguidamente apresentamos alguns exemplos de séries que podem ser expressas de acordo com o teorema:

A série ${}_1F_0$ com argumento um pode ser sempre somada e tem o valor zero:

$$ {}_1F_0[-n; 1] = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. $$

A série ${}_2F_1$ com argumento um pode ser sempre somada pelo Teorema de Chu-Vandermonde 1.7.1:

$${}_2F_1\left[a,-n;c;1\right]=\frac{(c-a)_n}{(c)_n},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

A série ${}_3F_2$ com argumento um pode ser somada pelo Teorema de Pfaff-Saalschütz 1.7.2, se a soma dos parâmetros denominador exceder em uma unidade a soma dos parâmetros numerador.

$${}_3F_2\left[-n,a,b;c,a+b+1-c-n;1\right]=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Outro caso da série ${}_3F_2$ que pode ser somada, é dada pelo Teorema de Dixon 1.7.5:

$$\begin{aligned}&{}_3F_2\left[a,b,c;1+a-b,1+a-c;1\right]=\\&=\Gamma\left[1+\frac{1}{2}a,1+a-b,1+a-c,1+\frac{1}{2}a-b-c;1+a,1+\frac{1}{2}a-b,1+\frac{1}{2}a-c,1+a-b-c\right],\\&\qquad Re\left(1+\frac{1}{2}a-b-c\right)>0.\end{aligned}$$

1.8 Séries de Appell

Na ponto 1.4 generalizámos a série de Gauss aumentando o número de parâmetros. Outra forma de a generalizar passa pelo aumento do número de variáveis que leva ao estudo das séries duplas com duas variáveis, designadas por séries de Appell. No capítulo 4 estudaremos funções de duas variáveis totalmente regulares que são a base das funções da Análise de Clifford. Segundo Slater [26], o caso mais simples é o produto de duas séries de Gauss

$${}_2F_1[a,b;c;x]\ {}_2F_1[a',b';c';y]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(a')_n(b)_m(b')_nx^my^n}{(c)_m(c')_nm!n!}.$$

Esta série, em si mesma, não assinala nada de inédito, mas se um ou mais dos três pares de produtos

$$(a)_m(a')_n,\quad (b)_m(b')_n,\quad (c)_m(c')_n$$

for substituido por um produto composto do tipo

$$(a)_{m+n},$$

somos conduzidos para algumas séries completamente novas.

Surgem cinco possibilidades,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}x^m y^n}{(c)_{m+n}m!n!} &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{(a)_N(b)_N x^m y^{N-m}}{(c)_N(N-m)!m!}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(a)_N(b)_N(x+y)^N}{(c)_N N!}\\ &= {}_2F_1[a,b;c;x+y].\end{aligned}$$

Isto é somente uma série ordinária de Gauss. A soma é obtida pelo teorema binomial. Agora

$$F_1[a;b,b';c;x,y]\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n x^m y^n}{(c)_{m+n}m!n!}.$$

Esta é a série de Appell do primeiro tipo, que existe para todos os valores reais ou complexos $a,\ b,\ b',\ c,\ x$ e y, excepto se c for um inteiro negativo.

$$F_2[a;b,b';c,c';x,y]\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n x^m y^n}{(c)_m(c')_n m!n!},$$

existe para todos os valores reais ou complexos $a,\ b,\ b',\ c,\ c',\ x$ e y, excepto se $c,\ c'$ forem inteiros negativos.

$$F_3[a,a';b,b';c;x,y]\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(a')_n(b)_m(b')_n x^m y^n}{(c)_{m+n}m!n!},$$

existe para todos os valores excepto se c for inteiro negativo.

$$F_4[a;b;c,c';x,y]\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}x^m y^n}{(c)_m(c')_n m!n!},$$

existe para todos os valores excepto se $c,\ c'$ forem inteiros negativos.

O trabalho destas séries deve-se a Appell e a Kampé de Fériét (1926) (ver Apêndice B). Uma grande parte do trabalho de investigação foi também realizado por Jakob Horn, que publicou uma considerável documentação onde definiu trinta tipos de séries duplas (ver [15]), incluindo séries com sufixos do tipo $m-n$, como os normais $m+n$ sufixos. Por outro lado, as séries de Lauricella (ver Anexo C) são exemplos da generalização a várias variáveis.

Podemos rescrever as séries em termos da série de Gauss, de forma que

$$F_1[a;b,b';c;x,y]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m x^m}{(c)_m m!}\ {}_2F_1[a+m,b';c+m;y],$$

$$F_2[a;b,b';c,c';x,y]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m x^m}{(c)_m m!}\ {}_2F_1[a+m,b';c';y],$$

$$F_3[a,a';b,b';c;x,y] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m x^m}{(c)_m m!} \; {}_2F_1[a',b';c+m;y],$$

$$F_4[a;b;c,c';x,y] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m x^m}{(c)_m m!} \; {}_2F_1[a+m,b+m;c';y].$$

Todas as quatro séries de Appell reduzem-se a séries ordinárias de Gauss ${}_2F_1[x]$ quando $y=0$. As primeiras três séries também se reduzem a séries ordinárias ${}_2F_1[x]$ quando b' é zero.

1.9 Convergência das séries duplas

Slater [26] prova que as quatro séries duplas F_1, F_2, F_3 e F_4 são convergentes, sob algumas condições. O termo geral de F_1 é

$$A_{mn} x^m y^m \equiv \Gamma\left[c, a+m+n, b+m, b'+n; a, b, b', c+m+n, m+1, n+1\right] x^m y^n.$$

Pela fórmula de Stirling (ver [3]), o comportamento assimptótico para grandes valores de m e n,

$$A_{mn} \sim \Gamma\left[c; a, b, b'\right] m^{b-1} n^{b'-1} (m+n)^{a-c}.$$

Seja N um inteiro negativo, tal que

$$N > \left|\Gamma\left[c; a, b, b'\right]\right|,$$

então

$$|A_{mn} x^m y^n| < N |x|^m |y|^n (m+n)^{-Re(c-a)} m^{Re(b)-1} n^{Re(b')-1},$$

de forma que F_1 é convergente quando $|x| < 1$ e $|y| < 1$. Reciprocamente, esta série é divergente se $|x| > 1$ ou $|y| > 1$.

De igual modo, se o termo geral para F_2 é $A_{mn} x^m y^n$, então

$$|A_{mn} x^m y^n| < N \frac{(1)_{m+n}}{(1)_m (1)_n} (m+n)^{Re(a)-1} m^{Re(b-c)} n^{Re(b'-c')} |x|^m |y|^n.$$

Se k é um número positivo, tal que

$$k > \max\left[Re(b-c), Re(b'-c')\right],$$

então

$$m^{Re(b-c)} n^{Re(b'-c')} < m^k n^k \leq \left[\frac{1}{2}(m+n)\right]^{2k},$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |A_{mn}x^m y^n| &< \frac{N}{4^k}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_{m+n}}{(1)_m(1)_n}(m+n)^{2k+Re(a)-1}|x|^m|y|^n \\
&< \frac{N}{4^k}\sum_{r=0}^{\infty} r^{2k+Re(a)-1}\left(|x|+|y|\right)^r,
\end{aligned}$$

onde $r = m+n$. Esta série é convergente quando $|x|+|y| < 1$. Logo, F_2 é convergente quando $|x|+|y| < 1$.

Para a série F_3, antende-se que

$$|A_{mn}x^m y^n| < N m^{Re(a+b)-2} n^{Re(a'+b')-2}(m+n)^{1-Re(c)}\frac{(1)_m(1)_n}{(1)_{m+n}}|x|^m|y|^n,$$

a qual é

$$|A_{mn}x^m y^n| < N m^{Re(a+b)-2} n^{Re(a'+b')-2}(m+n)^{1-Re(c)}|x|^m|y|^n,$$

logo a série é convergente quando $|x| < 1$ e $|y| < 1$.

Finalmente, para F_4, vemos

$$|A_{mn}x^m y^n| < N(m+n)^{Re(a+b)-2} m^{1-Re(c)} n^{1-Re(c')}\left[\frac{(1)_{m+n}}{(1)_m(1)_n}\right]^2 |x|^m|y|^n.$$

Novamente, se k é um número positivo tal que

$$k > \max\left[1-Re(c), 1-Re(c')\right],$$

então

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |A_{mn}x^m y^n| &< \frac{N}{4^k}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)^{2k+Re(a+b)-2}\left[\frac{(1)_{m+n}}{(1)_m(1)_n}\right]^2 |x|^m|y|^n \\
&< \sum_{r=0}^{\infty} r^{2k+Re(a+b)-2}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}^s |x|^{r-s}|y|^s, \quad \text{onde } r = m+n \\
&< \sum_{r=0}^{\infty} r^{2k+Re(a+b)-2}\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{2r}
\end{aligned}$$

sendo a série convergente se $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} < 1$. Por conseguinte F_4 é convergente sob a mesma condição.

1.10 Equações diferenciais parciais satisfeitas pelas séries de Appell

De acordo com Slater [26], se

$$F_1 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}x^m y^n,$$

então

$$A_{m+1,n} = \frac{(a+m+n)(b+m)}{(1+m)(c+m+n)}A_{m,n}$$

e

$$A_{m,n+1} = \frac{(a+m+n)(b'+n)}{(1+n)(c+m+n)}A_{m,n}.$$

Seja

$$\theta \equiv x\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad \phi \equiv y\frac{\partial}{\partial y}$$

então F_1, satisfaz o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \left\{(\theta+\phi+a)(\theta+b) - \frac{1}{x}\theta(\theta+\phi+c-1)\right\}z = 0 \\ \left\{(\theta+\phi+a)(\phi+b') - \frac{1}{x}\theta(\theta+\phi+c-1)\right\}z = 0. \end{cases}$$

Seja agora $p \equiv \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q \equiv \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $r \equiv \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $s \equiv \dfrac{\partial z^2}{\partial x^2}$ e $t \equiv \dfrac{\partial z^2}{\partial y^2}$.

Então F_1 satisfaz as equações

$$\begin{cases} x(1-x)r + y(1-x)s + \{c-(a+b+1)x\}\,p - byq - abz = 0 \\ y(1-y)t + x(1-y)s + \{c-(a+b'+1)y\}\,q - b'xp - ab'z = 0. \end{cases}$$

De igual modo, F_2 satisfaz as equações

$$\begin{cases} x(1-x)r - xys + \{c-(a+b+1)x\}\,p - byq - abz = 0 \\ y(1-y)t - xys + \{c'-(a+b'+1)y\}\,q - b'xp - ab'z = 0, \end{cases}$$

F_3 satisfaz

$$\begin{cases} x(1-x)r + ys + \{c-(a+b+1)x\}\,p - abz = 0 \\ y(1-y)t + xs + \{c-(a'+b'+1)y\}\,q - a'b'z = 0, \end{cases}$$

e F_4 satisfaz

$$\begin{cases} x(1-x)r - y^2t - 2xys + cp - (a+b+1)(xp+yq) - abz = 0 \\ y(1-y)t - x^2r - 2xys + c'q - (a+b+1)(xp+yq) - abz = 0. \end{cases}$$

Capítulo 2

Séries hipergeométricas e polinómios ortogonais clássicos

2.1 Relação entre séries hipergeométricas e equações diferenciais

A maioria das séries hipergeométricas satisfazem equações diferenciais particulares. Neste ponto, com base em Henrici [14] partimos da série hipergeométrica generalizada para chegarmos à equação diferencial e vice-versa.

Seja δ o operador diferencial que transforma z^n em nz^{n-1}. Para propósitos formais trabalhamos com o operador diferenciável $\theta := z\delta$ em vez de δ. Então para $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\theta z^n = nz^n$. Produtos, somas e multiplicações escalares de θ saõ definidos da mesma forma.

Exemplo 2.1.1 *O operador $\theta^2 - 3\theta + 1$ aplicado a z^n, tranforma-se em $\left(n^2 - 3n + 1\right) z^n$. O mesmo resultado pode ser obtido pelo operador $z^2\delta^2 - 2z\delta + 1$.*

Seja P_n o n-ésimo termo da série hipergeométrica generalizada, ou seja,

$$P_n = \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n n!} z^n.$$

Operando em P com $\theta + c$ $(c = 0, b_1 - 1, \ldots, b_q - 1)$, acrescentamos o operador $n + c$ ao numerador, ou seja,

$$\begin{aligned} \theta\,(\theta + b_1 - 1)\ldots(\theta + b_q - 1)\,P_n &= \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n \; n(n + b_1 - 1)\ldots(n + b_q - 1)}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n \; n!} z^n \\ &= \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_{n-1} \ldots (b_q)_{n-1}(n-1)!} z^n \\ &= z\,(\theta + a_1)\ldots(\theta + a_p)\,P_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.2 *Sejam $a_1,\ a_2, \ldots, a_p;\ b_1,\ b_2 \ldots, b_q$ elementos arbitrários de $\mathcal{F}$ tal que nenhum b_i é zero ou um inteiro negativo. Então a série hipergeométrica generalizada*

$${}_pF_q[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \ldots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}$$

é a única solução da equação diferencial formal

$$\theta\,(\theta + b_1 - 1)\ldots(\theta + b_q - 1)\,P = z\,(\theta + a_1)\ldots(\theta + a_p)\,P, \tag{2.2}$$

onde o coeficiente de z^0 é 1.

Demonstração:

$P = F$ é a solução, que pode ser observada comparando os termos envolvendo z^n em ambos os lados de (2.2), usando (2.1). Seja $P = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ a solução, e assuma-se que

$$c_m = \frac{(a_1)_m \ldots (a_p)_m}{(b_1)_m \ldots (b_q)_m m!}$$

é verdade para $m = n$. Então o coeficiente de z^{n+1} na direita de (2.2) é

$$(a_1 + n)\ldots(a_p + n)\,c_n \tag{2.3}$$

e na esquerda é

$$(n + 1)\,(b_1 + n)\ldots(b_q + n)\,c_{n+1}. \tag{2.4}$$

Igualando (2.3) a (2.4) e visto que nenhum dos factores $n + 1, b_1 + n, \ldots, b_q + n$ é nulo, temos

$$c_{n+1} = \frac{(a_1 + n)\ldots(a_p + n)}{(b_1 + n)\ldots(b_q + n)(n + 1)} c_n.$$

O resultado é por indução em relação a n.

■

A equação (2.2) pode ser reescrita como

$$\left\{z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+b_1-1\right)\left(z\frac{d}{dz}+b_2-1\right)\ldots\left(z\frac{d}{dz}+b_q-1\right)\right.$$
$$\left.-z\left(z\frac{d}{dz}+a_1\right)\left(z\frac{d}{dz}+a_2\right)\ldots\left(z\frac{d}{dz}+a_p\right)\right\}P=0,$$

denominada por equação diferencial hipergeométrica generalizada.

Exemplo 2.1.3 *Vamos determinar a equação satisfeita pela série de Gauss $F[a,b;c;z]$. Pelo Teorema 2.1.2, a série é a única solução formal, com coeficiente inicial igual a 1 da equação*

$$\theta(\theta+c-1)P = z(\theta+a)(\theta+b)P.$$

Na notação convencional aparece como

$$z(1-z)P'' + [c-(a+b+1)z]\,P' - abP = 0.$$

Expressando θ em termos de δ, a equação diferencial (2.2) assume a forma

$$\left(z^{q+1}\delta^{q+1}+s_q z^q\delta^q+\ldots+s_1 z\delta\right)P = z\left(z^p\delta^p+r_{p-1}z^{p-1}\delta^{p-1}+\ldots+r_0\right)P \qquad (2.5)$$

onde $r_0,\ldots,r_{p-1}$ e $s_1,\ldots,s_q$ são constantes dependentes de a_i e b_j, respectivamente.

Uma questão surge-nos: todas as equações diferenciais na forma anterior, podem ser solucionadas formalmente por um série conveniente?

Num primeiro plano há que escrever os operadores diferenciais que aparecem dentro dos parentêses em (2.5) como polinómios em θ. De forma a utilizar o Teorema 2.1.2, escrevemos estes polinómios como produtos dos factores lineares $\theta+b_j-1$ e $\theta+a_i$, respectivamente. Ou seja, no campo dos números complexos, a equação diferencial (2.5) pode ser sempre reduzida à forma (2.2). Se b_j é zero ou um inteiro negativo, não existe solução na forma de série hipergeométrica generalizada.

As equações diferenciais na forma (2.5) são facilmente reconhecidas, se definirmos o peso do termo $z^n\delta^m$ por $n-m$, onde os mais pesados de todos os termos em (2.5) são 0 e 1.

Exemplo 2.1.4 *Consideramos a equação $zP''+(c-z)P'-aP=0$.*
Os termos mais pesados são 0 e -1. Tornam-se 1 e 0 se multiplicarmos a equação por z,

$$\left(z^2\delta^2+cz\delta\right)P = z\left(z\delta+a\right)P.$$

Como $z^2\delta^2 = \theta^2 - \theta$, então

$$\left[\theta^2 + (c-1)\theta\right] P = z(\theta + a)P$$

está na forma indicada para se utilizar o Teorema 2.1.2, onde $p = q = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = c$. Assim, se $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ a equação tem a solução formal $P = {}_1F_1[a; c; z]$, a única solução com o coeficiente z^0 igual a 1.

2.2 Polinómios ortogonais

Os polinómios ortogonais clássicos podem ser escritos como séries hipergeométricas através do processo referido no ponto 1.6, onde são calculados os seus factores comuns e o quociente entre dois dos seus termos consecutivos. Do ponto de vista das séries hipergeométricas conseguimos provar com base no Teorema 2.1.2, que o polinómio associado de Laguerre satisfaz uma equação diferencial. Os restantes polinómios não satisfazem o teorema pois as variáveis são modificadas, ou seja, são combinações da variável z. Neste ponto utilizamos as séries ordinárias que definem os polinómios ortogonais e as equações diferenciais satisfeitas por estes, que constam nas obras [2] e [24].

O **polinómio associado de Laguerre** $L_n^\alpha(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{z^k}{k!}$ com $0 \leq z \leq \infty$, $\alpha > -1$ e $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, pode ser escrito como série hipergeométrica da forma

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_1F_1\left[-n; \alpha+1; z\right] \tag{2.6}$$

e satisfaz a equação diferencial

$$z\left(L_n^\alpha(z)\right)'' + (1+\alpha-z)\left(L_n^\alpha(z)\right)' + nL_n^\alpha(z) = 0. \tag{2.7}$$

Se $\alpha = 0$ está-se perante o usual polinómio de Laguerre.

Prova:

O factor comum é $t_0 = \binom{n+\alpha}{n}$. O quociente de dois termos consecutivos é

$$\begin{aligned}\frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{(-1)(n-k)!(\alpha+k)!k!}{(n-k-1)!(\alpha+k+1)!(k+1)!}z \\ &= \frac{k-n}{(k+\alpha+1)(k+1)}z.\end{aligned}$$

Logo escrevemos o polinómio da seguinte forma

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1\left[-n;\alpha+1;z\right].$$

Pelo Teorema 2.1.2 o polinómio associado de Laguerre satisfaz a equação diferencial

$$\theta(\theta+\alpha)L_n^\alpha(z) = z(\theta-n)L_n^\alpha(z).$$

Na notação convencial, surge como

$$z\delta(z\delta+\alpha)L_n^\alpha(z) = z(z\delta-n)L_n^\alpha(z) \Leftrightarrow z\left(L_n^\alpha(z)\right)'' + (1+\alpha-z)\left(L_n^\alpha(z)\right)' + nL_n^\alpha(z) = 0.$$

■

O **polinómio de Legendre** $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{-n-1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$ com $-1 \le z \le 1$ e $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, pode ser escrito como série hipergeométrica da forma

$$P_n(z) = {}_2F_1\left[-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right]$$

e satisfaz a equação diferencial

$$(1-z^2)P_n''(z) - 2zP_n'(z) + n(n+1)P_n(z) = 0.$$

Prova:

O factor comum é $t_0 = 1$. O quociente de dois termos consecutivos é

$$\begin{aligned}\frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{k!(n-k)!k!(-n-k-1)!}{(k+1)!(n-k-1)!(k+1)!(-n-k-2)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)\\ &= \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+1)}\left(\frac{1-z}{2}\right).\end{aligned}$$

Logo podemos escrever o polinómio da seguinte forma

$$P_n(z) = {}_2F_1\left[-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right].$$

■

O **polinómio de Hermite** $H_n(z) = n!\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2z)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$ com $-\infty < z < \infty$, $m = Int(n/2)$ e $n = 0, 1, 2, \ldots$, pode ser escrito como série hipergeométrica da forma

$$H_n(z) = (2z)^n {}_2F_0\left[-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; -z^{-2}\right]$$

e satisfaz a equação diferencial

$$H_n''(z) - 2zH_n'(z) + 2nH_n(z) = 0.$$

Prova:

O factor comum é $t_0 = (2z)^n$. O quociente de dois termos consecutivos é

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(-1)(2z)^{-2}k!(n-2k)!}{(k+1)!(n-2k-2)!} = \frac{\left(k-\frac{n}{2}\right)\left(k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{k+1}\left(-z^{-2}\right).$$

Logo, o polinómio pode ser apresentado da seguinte forma

$$H_n(z) = (2z)^n {}_2F_0\left[-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; -z^{-2}\right].$$

■

O **Polinómio de Chebyshev da 1^a espécie** $T_n(z) = \dfrac{n}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \dfrac{(-1)^k}{n-k}\binom{n-k}{k}(2z)^{n-2k}$ com $-1 \leq z \leq 1$, $m = Int(n/2)$ e $n = 1, 2, 3, \ldots$, pode ser escrito como série hipergeométrica da forma

$$T_n(z) = 2^{n-1} z^n {}_2F_1\left[-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}; -n+1; z^{-2}\right]$$

e satisfaz a equação diferencial

$$(1-z^2)T_n''(z) - zT_n'(z) + n^2 T_n(z) = 0.$$

Prova:

O factor comum é $t_0 = 2^{n-1}z^n$. O quociente de dois termos consecutivos é

$$\begin{aligned}
\frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{(-1)(n-k-1)!(n-k)k!(n-2k)!}{(n-k-1)(k+1)!(n-2k-2)!(n-k)!}(2z)^{-2} \\
&= \frac{\left(k-\frac{n}{2}\right)\left(k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)(k-n+1)} z^{-2}.
\end{aligned}$$

Logo podemos escrever o polinómio da seguinte forma

$$T_n(z) = 2^{n-1} z^n {}_2F_1\left[-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}; -n+1; z^{-2}\right].$$

$\blacksquare$

O **Polinómio de Chebyshev da 2^a espécie** $U_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2z)^{n-2k}$ com $-1 \leq z \leq 1$, $m = Int(n/2)$ e $n = 0, 1, 2, \ldots$, pode ser escrito como série hipergeométrica da forma

$$U_n(z) = (2z)^n {}_2F_1\left[-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}; -n; z^{-2}\right]$$

e satisfaz a equação diferencial

$$(1-z^2)U_n''(z) - 3zU_n'(z) + n(n+2)U_n(z) = 0.$$

Prova:

O factor comum é $t_0 = (2z)^n$. O quociente de dois termos consecutivos é

$$\begin{aligned}\frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{(-1)(n-k-1)!k!(n-2k)!}{(k+1)!(n-2k-2)!(n-k)!}(2z)^{-2} \\ &= \frac{\left(k-\frac{n}{2}\right)\left(k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(k-n)(k+1)}z^{-2}.\end{aligned}$$

O polinómio é escrito da seguinte forma

$$U_n(z) = (2z)^n {}_2F_1\left[-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}; -n; z^{-2}\right].$$

■

O **Polinómio de Gegenbauer** $C_n^\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\Gamma(\alpha+n-k)}{k!(n-2k)!}(2z)^{n-2k}$ com $-1 \leq z \leq 1$, $m = Int(n/2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha > -\frac{1}{2}$ e $\alpha \neq 0$, pode ser escrito como série hipergeométrica da forma

$$C_n^\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}(2z)^n {}_2F_1\left[-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}; -\alpha-n+1; z^{-2}\right]$$

e satisfaz a equação diferencial

$$(1-z^2)\left(C_n^\alpha(z)\right)'' - 2(\alpha+1)z\left(C_n^\alpha(z)\right)' + n(n+2\alpha)C_n^\alpha(z) = 0.$$

Prova:

O factor comum é $t_0 = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!}(2z)^n$. O quociente de dois termos consecutivos é

$$\begin{aligned}\frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{(-1)(\alpha+n-k-2)!k!(n-2k)!}{(\alpha+n-k-1)!(k+1)!(n-2k-2)!}(2z)^{-2} \\ &= \frac{(k-\frac{n}{2})(k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{(k-\alpha-n+1)(k+1)}z^{-2}.\end{aligned}$$

Por conseguinte, escrevemos o polinómio da seguinte forma

$$C_n^\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}(2z)^n {}_2F_1\left[-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}; -\alpha-n+1; z^{-2}\right].$$

∎

O **Polinómio de Jacobi** $P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(z-1)^{n-k}(z+1)^k$ com $-1 \leq z \leq 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha > -1$ e $\beta > -1$ pode ser escrito como série hipergeométrica da forma

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{2^n}\binom{n+\beta}{n}(z-1)^n {}_2F_1\left[-n-\alpha, -n; beta+1; \frac{z+1}{z-1}\right]$$

e satisfaz a equação diferencial

$$(1-z^2)\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\right)'' + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)z)\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\right)' + n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = 0.$$

Prova:

O factor comum é $t_0 = \binom{n+\beta}{n}(z-1)^n$. O quociente de dois termos consecutivos é

$$\begin{aligned}\frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{(n+\alpha-k)!(n-k)!(\beta+k)!k!}{(n+\alpha-k-1)!(n-k-1)!(\beta+k+1)!(k+1)!}\frac{z+1}{z-1} \\ &= \frac{(k-n-\alpha)(k-n)}{(k+\beta+1)(k+1)}\frac{z+1}{z-1}.\end{aligned}$$

O polinómio é escrito da seguinte forma

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{2^n}\binom{n+\beta}{n}(z-1)^n {}_2F_1\left[-n-\alpha, -n; beta+1; \frac{z+1}{z-1}\right].$$

∎

Outra forma de representação do polinómio de Jacobi, $G_n(p,q,z)$, que depende de P_n é

$$G_n(p,q,z) = \frac{n!\Gamma(n+p)}{\Gamma(2n+p)}P_n^{(p-q,q-1)}(2z-1).$$

Capítulo 3

Elementos da Análise de Clifford

Este capítulo é baseado essencialmente nas obras [7, 8, 9, 19, 20, 21, 22].

A Análise de Clifford é uma designação atribuida a todos as áreas da Análise multidimensional que trabalham na base de fundamentos algébricos mais gerais, que o corpo dos números complexos. O números de áreas é muito extenso e inclui, além de outras a análise harmónica, a teoria do potencial e a geometria diferencial.

Uma álgebra de dimensão finita, com um elemento unidade no corpo dos números reais ou complexos, foi antigamente conhecida como um sistema hipercomplexo. A definição de sistema hipercomplexo de números pode incluir a exigência da multiplicação associativa.

Como exemplos de sistemas hipercomplexos, temos os números reais e os complexos, os quaterniões, os números de Cayley, os números de Clifford (para $n = 3$ são conhecidos como números de Clifford-Lipschitz) e as álgebras de matrizes sobre $\mathbb{R}$. Os números de Clifford têm uma representação isomórfica como elementos de uma matriz algébrica $(2^n \times 2^n)$. A representação matricial dos números complexos e dos quaterniões são os casos especiais mais conhecidos. As Álgebras de Clifford, como álgebras associativas não comutativas sobre o corpo dos números reais ou complexos podem ser definidas através de métodos diferentes, mas a forma mais fácil é introduzir a base da álgebra, através das regras da multiplicação de uma base ortonormal (ONB) sobre o espaço vectorial de dimensão n.

3.1 Definição de Álgebra de Clifford

Definição 3.1.1 *Seja* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *uma base ortonormada (ONB) de* $\mathbb{R}^n$ *com um produto de acordo com as regras da multiplicação*

$$e_k e_l + e_l e_k = -2\delta_{kl} e_0 \quad (k, l = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

onde δ_{kl} *é o símbolo de Kronecker. Este produto não comutativo, gera a Álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *de dimensão* 2^n*. A Álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ *construída sobre* $\mathbb{R}$ *é o conjunto de todos os números* $\alpha \in \mathcal{C}l_{0,n}$ *tal que*

$$\alpha = \sum_A \alpha_A e_A$$

com a base $\{e_A : A \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ *formada por*

$$e_A = e_{h_1} e_{h_2} \ldots e_{h_r}, \ 1 \leq h_1 < \ldots < h_r \leq n, \ e_\varnothing = e_0 = 1, \ e_i = e_{\{i\}} \quad (i = 1, \ 2, \ldots, \ n)$$

onde as componentes α_A *são números reais. O conjugado do elemento* α *é definido por* $\overline{\alpha} = \sum_A \alpha_A \overline{e}_A$*, onde*

$$\overline{e}_A = \overline{e}_{h_r} \overline{e}_{h_{r-1}} \ldots \overline{e}_{h_1}; \ \overline{e}_k = -e_k \quad (k = 1, \ldots, n); \ \overline{e}_0 = e_0 = 1.$$

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ definimos um produto interno em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ da seguinte forma

$$(\alpha, \beta) = \sum_A \alpha_A \beta_A$$

e definimos uma norma

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \left(\sum_A |\alpha_A|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

com

$$|\alpha\beta| \leq 2^n |\alpha||\beta|.$$

Neste sentido, $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ é uma álgebra linear, associativa mas não comutativa sobre $\mathbb{R}$ e um espaço de Hilbert.

Por outro lado, seja $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$ o subespaço real constituido pelos elementos da forma especial

$$\alpha = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k e_k \qquad (m \leq n),$$

que são denominados por **números hipercomplexos**. Assim, para os números hipercomplexos α, β

$$\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2$$

e

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|,$$

onde para cada $\alpha \neq 0 \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$ o seu inverso é

$$\alpha^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}.$$

De salientar que o vector $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ aparece como um elemento de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ na forma $x = \vec{x} = x_1 e_1 \ldots x_n e_n$ denominado, **1-vector**, enquanto que o escalar real x_0 na forma $x = x_0 e_0 = x_0$ designa-se por **0-vector**. Neste sentido é usual considerar uma graduação dos elementos de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ em relação à cardinalidade de $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$, que conduz aos subconjuntos de $\binom{n}{2}$ $2 - vectores$ ou bi-vectores, $\binom{n}{3}$ $3 - vectores$ até $1 = \binom{n}{n}$ $2^n - vectores.$

A teoria das funções complexas de várias variáveis complexas, usa para a descrição do conjunto do domínio, a álgebra dos números complexos combinando $2n$ variáveis reais $(x_1, \ldots, x_n,$ $y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ com um vector de n variáveis complexas $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$. Logo é possível realizar a transformação inversa da variável do complexo para o real, com o auxílio do vector dos seus conjugados $(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$ na forma

$$x_k = \frac{1}{2}(\overline{z}_k + z_k) \tag{3.3}$$

e

$$y_k = \frac{i}{2}(\overline{z}_k - z_k), \tag{3.4}$$

para $k = 1, \ldots, n$. Neste caso identificamos $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Em particular, a propriedade local da diferenciabilidade complexa de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ implica que f pode ser considerada como uma função de z_k, $k = 1, \ldots, n$ e não de $\overline{z}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Tal deve-se ao facto de ser localmente aproximável por uma aplicação linear (o diferencial) do vector $(dz_1, \ldots, dz_n)$. Uma importante consequência é a representação de $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, usando séries de potências múltiplas em $(z_1, \ldots, z_n)$.

De forma a termos o domínio de uma estrutura hipercomplexa, é usual identificarmos pontos de $\mathbb{R}^{n+1}$ denotados por $x = (x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \vec{x})$ com a variável hipercomplexa

$$z = x_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n} := span_{\mathbb{R}}\{1, e_1, \ldots, e_n\},$$

denominada para-vector, o que significa $0 - vector + 1 - vector$. O conjugado de z é dado por $\overline{z} = x_0 - x_1e_1 - \ldots - x_ne_n$.
A extensão de (3.2) para a norma de $\alpha \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ é faliciosa e conduz-nos a

$$\|\alpha\| = \left(\sum_A \alpha\overline{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_A \alpha_A^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A diferenciabilidade usual generalizada para a teoria das funções hipercomplexas, considera funções com valores $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ da forma $f(z) = \sum_A f_A(z)e_A,\ \ f_A(z) \in \mathbb{R}$, como aplicações

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n} \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,n}.$$

Uma segunda estrutura hipercomplexa de $\mathbb{R}^{n+1}$ consiste no seguinte isomorfismo

$$\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n = \{\vec{z} : \vec{z} = (z_1, \ldots, z_n),\ z_k = x_k - x_0e_k;\ x_0, x_k \in \mathbb{R}\},$$

o qual significa realizar n copias $\mathbb{C}_k$ de $\mathbb{C}$ onde $i \cong e_k$, $(k = 1, \ldots, n)$; $x_0 \cong \operatorname{Re} z$; $x_k \cong \operatorname{Im} z$ onde $z \in \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}_k := -e_k\mathbb{C}$. Então $\mathcal{H}^n$ é o produto cartesiano $\mathcal{H}^n := \mathbb{C}_1 \times \ldots \times \mathbb{C}_n$ e as funções $f(z) = \sum_A f_A(z)e_A$ com valores $\mathcal{C}l_{0,n}$, são consideradas como aplicações

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n \mapsto \mathcal{C}\ell_{0,n}.$$

3.2 Diferenciabilidade Hipercomplexa

A abordagem de Cauchy para funções holomorfas de uma variável complexa está relacionada com o conceito de diferenciabilidade complexa. O primeiro passo para a conveniente generalização dessa abordagem na teoria das funções hipercomplexas resulta pela consideração da estrututa da aplicação linear $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^n; \mathcal{C}\ell_{0,n})$.

Para determinarmos a forma geral da aplicação linear de $\mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, temos de ter em conta que a aplicação linear usada tem de ser $\mathcal{C}\ell_{0,n}$-linear e que gera apenas um módulo sobre o anel não comutativo, a não ser que $n = 1$.

$\mathcal{H}^n$ é um subconjunto especial do n-ésimo produto cartesiano $(\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$ de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, mas não é um submódulo $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, desde que

$$\lambda\vec{z},\ \vec{z}\lambda \in \mathcal{H}^n \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Contudo, o embebimento de $\mathcal{H}^n$ no módulo esquerdo (direito) $(\mathcal{C}l_{0,n})^n$ permite-nos usar as propriedades de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ para descrever a aplicação linear $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ de $\mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$.

Definição 3.2.1 *Se $\vec{u}, \vec{v} \in (\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$ e $\lambda \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ então*

$$\ell : \mathcal{H}^n \longmapsto (\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$$

denomina-se aplicação linear de $\mathcal{H}^n$ em $(\mathcal{C}l_{0,n})^n$ se

$$\ell(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\ell(\vec{u}) + \ell(\vec{v}),$$

no caso de uma aplicação linear esquerda se

$$\ell(\vec{u}\lambda + \vec{v}) = \ell(\vec{u})\lambda + \ell(\vec{v})$$

denomina-se aplicação linear direita.

Teorema 3.2.2 *[22] Qualquer aplicação $\ell_L(\ell_R) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^n; \mathcal{C}\ell_{0,n}), \mathcal{C}\ell_{0,n}$ linear à esquerda (à direita) pode ser representada de uma única maneira, na forma*

$$\ell_L(\vec{z}) = z_1 A_1 + \ldots + z_n A_n \tag{3.5}$$

$$\ell_R(\vec{z}) = A_1 z_1 + \ldots + A_n z_n, \tag{3.6}$$

onde $A_k \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$, $(k = 1, \ldots, n)$.

Demonstração:

Seja $\vec{s}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $(k = 1, \ldots, n)$ elementos da base canónica do módulo $(\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$. Então temos a representação da base canónica à esquerda (à direita)

$$\vec{z} = z_1\vec{s}_1 + \ldots + z_n\vec{s}_n$$

$$\vec{z} = \vec{s}_1 z_1 + \ldots + \vec{s}_n z_n$$

de $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$, considerado como um elemento de $(\mathcal{C}\ell_{0,n})^n$.
Uma vez que $z_k\vec{s}_k \notin \mathcal{H}^n$, apenas o embebimento de $\mathcal{H}^n$ em $(C\ell_{0,n})^n$ permite-nos escrever estas representações, que nos conduzem a

$$\ell_L(\vec{z}) = z_1 A_1 + \ldots + z_n A_n$$

$$\ell_R(\vec{z}) = \widetilde{A}_1 z_1 + \ldots + \widetilde{A}_n z_n$$

com $A_k = \ell_L(\vec{s}_k)$, respectivamente $\widetilde{A}_k = \ell_R(\vec{s}_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

A unicidade segue do facto de as componentes de $\vec{z}$ formarem uma base para o dual algébrico $\mathcal{L}_L(\mathbb{H}^n, \mathcal{C}\ell_{0,n})$, respectivamente $\mathcal{L}_R(\mathbb{H}^n, \mathcal{C}\ell_{0,n})$ de $\mathbb{H}^n$. De facto, $z_1, \ldots, z_n$ são $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ linearmente independentes à esquerda (à direita). Por exemplo, no caso à direita

$$\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n - x_0(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = 0,$$

com $\alpha_k \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$, $k = 1, \ldots, n$, temos $\alpha_k \equiv 0$. O mesmo acontece no caso à esquerda.

■

Segue como corolário que as componentes de $\vec{z}$ formam uma base para os duais algébricos $\ell_L(\mathcal{H}^n; (\mathcal{C}\ell_{0,n})^n)$, respectivamente $\ell_R(\mathcal{H}^n; (\mathcal{C}\ell_{0,n})^n)$ de $\mathcal{H}^n$.

Estamos agora em condições de definir o produto interno para várias variáveis complexas

$$(\vec{z}, \vec{\zeta}) = \overline{(\vec{\zeta}, \vec{z})} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} \zeta_k, \tag{3.7}$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \|\vec{z}\| &= (\vec{z}, \vec{z})^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} z_k \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (n x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Geralmente para $(n \geq 1)$ não existe uma relação isométrica entre $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathcal{H}^n$ tal como entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$; mas para $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$,

$$n^{-\frac{1}{2}} \|\vec{z}\| \leq |z| = |x| \leq \|\vec{z}\|. \tag{3.8}$$

3.2.1 Definição de derivada hipercomplexa

Definição 3.2.3 *Seja f uma aplicação contínua numa vizinhança de $\vec{z}_* \in \mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$. Então f é denominada por* ***derivada hipercomplexa à esquerda (respectivamente derivada hipercomplexa à direita)*** *em $\vec{z}_*$ se existe uma aplicação ℓ linear $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ à esquerda (respectivamente à direita) tal que*

$$\lim_{\Delta\vec{z}\to 0} \frac{|f(\vec{z}_* + \Delta\vec{z}) - f(\vec{z}_*) - \ell(\Delta\vec{z})|}{\|\Delta\vec{z}\|} = 0. \tag{3.9}$$

A função f é ***diferenciável hipercomplexa em*** $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n$ *se for diferenciável hipercomplexa em todos os pontos de Ω.*

A aplicação linear $\ell_L(\ell_R)$ designa-se derivada hipercomplexa à esquerda (à direita) $f'_L(f'_R)$ da função f.

Nota: Com base em (3.5), (3.6) e (3.8) a relação (3.9) é equivalente a

$$f(\overrightarrow{z}_* + \Delta\overrightarrow{z}) - f(\overrightarrow{z}_*) = \Delta z_1 A_1 + \ldots + \Delta z_n A_n + o(\|\Delta\vec{z}\|), \tag{3.10}$$

no caso diferenciável hipercomplexo à esquerda onde $A_k \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ e

$$\lim_{\Delta\vec{z}\to 0} \frac{o(\|\Delta\vec{z}\|)}{\|\Delta\vec{z}\|} = 0.$$

(Análogamente para o caso diferenciável à direita). #

Relembramos que para uma aplicação f de $\widetilde{\mathcal{C}}\ell_{0,n}$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ obtemos

$$f(z + \Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|),$$

como exige a definição de diferenciabilidade.

Como consequência do teorema relativo à representação única das aplicações lineares de $\mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, segue o teorema:

Teorema 3.2.4 *Se $f(\vec{z})$ é diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita), então a correspondente aplicação linear (derivada à esquerda (à direita)) é determinada de forma única.*

3.2.2 Diferenciabilidade hipercomplexa e monogenicidade

De forma a observarmos que o conceito de diferenciabilidade hipercomplexa representa a abordagem de Cauchy na teoria das funções monogénicas, provemos o seguinte teorema:

Teorema 3.2.5 *Seja $f = f(\vec{z})$ diferenciável real continuamente num conjunto aberto $\Omega \subset \mathcal{H}^n$. Então f é diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita) em Ω se e só se $Df = 0$ $(fD = 0)$ em Ω, onde D é o operador diferencial hipercomplexo*

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + e_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{3.11}$$

que actua na função f a partir da esquerda (respectivamente direita) como indica a sua posição no lado esquerdo (direito) de f.

Demonstração:

Consideramos apenas funções diferenciáveis à esquerda. A demonstração para as funções diferenciáveis à direita é análoga. Da suposição da diferenciabilidade real, segue que o incremento de $f(\vec{z})$ tem a forma

$$f(\vec{z} + \Delta\vec{z}) - f(\vec{z}) = \frac{\partial f}{\partial x_0}\Delta x_0 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n + o\left(|\Delta x|\right) \text{ onde } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o\left(|\Delta x|\right)}{|\Delta x|} = 0.$$

Através da transformação

$$x_0 = z_0,\ x_k = z_0 e_k + z_k, \quad k = 1, \ldots, n \tag{3.12}$$

com o inverso

$$z_0 = x_0,\ z_k = x_k - x_0 e_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

juntamente com a propriedade da norma (3.8), obtemos

$$\Delta f(\vec{z}) = \Delta z_0 Df + \Delta z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \Delta z_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + o\left(\|\Delta\vec{z}\|\right). \tag{3.13}$$

$Df = 0$ é condição necessária para a diferenciabilidade à esquerda, que segue da forma do incremento de uma função diferenciável hipercomplexa, a única determinação de ℓ_L e a $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ independência linear de $z_0,\ z_1, \ldots, z_n$, isto é, do Teorema 3.2.2. $Df = 0$ é também uma condição suficiente para a diferenciabilidade à esquerda, que surge da Definição 3.2.3.

∎

Nota:

1. Para a demonstração do caso de diferenciabilidade à direita, (3.12) tem de ser substituido pela transformação "direita" $x_0 = z_0$ e $x_k = e_k z_0 + z_k$.

2. Obtemos o mesmo resultado pela aplicação de

$$x_0 = \frac{1}{n+1}(\overline{z} + e_1 z_1 + \ldots + e_n z_n) \tag{3.14}$$

$$x_k = \frac{1}{n+1}(e_k \overline{z} + e_k e_1 z_1 + \ldots + n z_k + \ldots + e_k e_n z_n) \tag{3.15}$$

para $k = 1, \ldots, n$, a transformação que é inversa a

$$\overline{z} = x_0 - e_1 x_1 - \ldots - e_n x_n, \; z_k = -e_k x_0 + x_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Em vez de (3.13), $\Delta f(\vec{z})$ torna-se igual a

$$\Delta f(\vec{z}) = \frac{1}{n+1} f D \Delta \overline{z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{n+1} f D e_1 \right) \Delta z_1 + \ldots + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{1}{n+1} f D e_n \right) \Delta z_n + o(\|\Delta \vec{z}\|)$$

e D pode ser alterado por $\frac{1}{n+1}D$, o que ilustra o papel do factor $\frac{1}{2}$ na derivada parcial complexa (3.19) (o caso $n = 1$).

3. Para $n = 1$, (3.13) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 \right) \Delta z_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta z_1 + o(\|\Delta z_1\|) \\ &= f D \Delta z_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta z_1 + o(\|\Delta z_1\|). \end{aligned}$$

Comparando com a forma complexa usual

$$\Delta f(z) = \frac{1}{2} f D \Delta \overline{z} + \frac{1}{2} f \overline{D} \Delta z + o(\|\Delta z\|) \tag{3.17}$$

e vemos que em vez de $\overline{D}$ o gradiente $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ (ver [28]) tem um papel mais importante.

#

Exemplo 3.2.6 *Consideremos o polinómio*

$$h(x) = x_1x_2 - x_0x_2e_1 - x_0x_1e_2 = \frac{1}{2}[z_1z_2 + z_2z_1], \tag{3.18}$$

então

$$\begin{aligned}
\Delta h(\vec{z}) &= \frac{1}{2}[(z_1 + \Delta z_1)(z_2 + \Delta z_2) + (z_2 + \Delta z_2)(z_1 + \Delta z_1) - (z_1z_2 + z_2z_1)] \\
&= \frac{1}{2}[(\Delta z_1z_2 + z_1\Delta z_2 + \Delta z_2z_1 + z_2\Delta z_1) + (\Delta z_1\Delta z_2 + \Delta z_2\Delta z_1)] \\
&= z_1\Delta z_2 + z_2\Delta z_1 + o(\|\Delta\vec{z}\|) \\
&= \Delta z_1z_2 + \Delta z_2z_1 + o(\|\Delta\vec{z}\|).
\end{aligned}$$

Uma vez que $\Delta z_1z_2 + z_1\Delta z_2 = \Delta z_2z_1 + z_2\Delta z_1$, segue pela definição (3.2.3), que $h(\vec{z})$ é diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita).

A relação do operador diferencial D definido por (3.11), com o operador diferencial parcial complexo

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \tag{3.19}$$

onde $z = x_0 + ix_1$ é evidente.

Definição 3.2.7 *O operador D é denominado por* ***operador generalizado de Cauchy-Riemann*** *e as soluções de $Df = 0$ (respectivamente $fD = 0$) são denominadas por* ***funções monogénicas à esquerda (à direita)****. O operador*

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} - e_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \ldots - e_n\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{3.20}$$

designa-se por ***operador generalizado conjugado de Cauchy-Riemann****.*

Exemplos 3.2.8

- *As variáveis hipercomplexas*

  $$f_k(z) = z_k := x_k - x_0e_k = -\frac{1}{2}[ze_k + ze_k],\ k = 1, \ldots, n$$

  são funções monogénicas à esquerda e à direita.

- *A função $f(z) = z \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$ é apenas monogénica se $n = 1$, uma vez que $Df = fD = = 1 - n$.*

- *Potências de z, isto é, $f(z) = z^n$ e produtos de variáveis totalmente regulares $z_j z_k$, $j \neq k$, não são monogénicas.*

- *Produtos simétricos de variáveis totalmente regulares na forma*

$$\frac{1}{2}[z_j z_k + z_k z_j] = x_j x_k - x_0 x_k e_j - x_0 x_j e_k$$

  são monogénicas à esquerda e à direita.

- *Em $\mathbb{C}$ para uma função holomorfa*

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} - i\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\frac{df}{dz} = 2f'.$$

  Usamos $\frac{1}{2}\overline{D}f$ como a derivada hipercomplexa de uma função monogénica f e adoptamos a notação $f' = \frac{1}{2}\overline{D}f$.

Salientamos que as funções monogénicas $z_k = x_k - x_0 e_k$, $k = 1, \ldots, n$ foram usadas pela primeira vez por Fueter [10, 11] e posteriormente denominadas por "variáveis totalmente regulares", tendo em conta o seu papel fundamental como variáveis hipercomplexas monogénicas. A abordagem generalizada de Cauchy à teoria das funções hipercomplexas, como explicada em [22], baseia-se desde o início na utilização deste tipo de n variáveis hipercomplexas.

Corolário 3.2.9 *A forma do diferencial df como a parte linear do incremento, segue através de (3.13)*

$$df = fDdz_0 + f(\nabla_{\vec{x}}, d\vec{z}) = dz_0 Df + (d\vec{z}, \nabla_{\vec{x}})f.$$

Usando os resultados anteriores, representamos D e o seu conjugado na forma

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} - (\nabla_{\vec{x}}, \hat{\imath})\,, \quad \overline{D} = \frac{\partial}{\partial x_0} + (\nabla_{\vec{x}}, \hat{\imath})\,,$$

onde $\nabla_{\vec{x}}$, representa o gradiente de f em relação a $\vec{x}$. Então inversamente temos

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{2}(\overline{D} + D) \tag{3.21}$$

$$(\nabla_{\vec{x}}, \hat{\imath}) = \frac{1}{2}(\overline{D} - D). \tag{3.22}$$

Teorema 3.2.10 *Se $f(\vec{z})$ é monogénica à direita (à esquerda) em $\Omega \subset \mathcal{H}^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$ e f'_R (f'_L) a sua derivada hipercomplexa à direita (à esquerda) que desaparece em Ω, então $f(\vec{z})$ é constante, isto é, uma função monogénica é determinada exactamente a menos de uma constante pela sua derivada hipercomplexa.*

Demonstração:

Consideremos as funções monogénicas à direita. Pela definição de diferenciabilidade hipercomplexa equivalente a $fD = 0$, segue de (3.22) que

$$f\left(\nabla_{\vec{x}}, \hat{\imath}\right) = \frac{1}{2} f\overline{D} = 0.$$

Por outro lado, por (3.21)

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0.$$

Além disso, o gradiente de f, em relação a $x = (x_0, \vec{x})$, desaparece e f é constante.

■

3.2.3 Produto Permutacional

A utilização do conjunto $\mathcal{H}^n$ na descrição de funções monogénicas conduz-nos a séries de potências em várias variáveis hipercomplexas. As componentes z_k de $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$ são uma espécie de projecção de $z \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$ em direcção à base canónica dos vectores $\vec{s_k} \in \mathcal{H}^n$, obtida pela multiplicação simétrica por $-e_k$, isto é,

$$z_k = -\frac{ze_k + e_k z}{2} = -ze_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.23}$$

Para $z = e_j \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$, $j = 1, \ldots, n$ e $z = e_0 = 1 \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$,

$$-e_j \times e_k = \delta_{jk}, \ -1 \times e_k = -e_k, \quad j, \ k = 1, \ldots, n$$

e consequentemente

$$\vec{e_k} = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = \vec{s_k} \tag{3.24}$$

$$\vec{1} = (-e_1, \ldots, -e_n) = \hat{\imath} \in \mathcal{H}^n. \tag{3.25}$$

De (3.24) e (3.25) segue que $\vec{z} = x_0\vec{1} + x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n}$ e com o auxílio do produto interno (3.7), temos

$$(\vec{e_k}, \vec{z}) = z_k, \ \ (\hat{\imath}, \vec{z}) = nx_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n.$$

As diferentes relações de $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ em relação a $z \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$ e $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$ são ilustradas por

$$z = x_0 + (\hat{\imath}, \vec{x}) \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}, \quad \vec{z} = \vec{x} + \hat{\imath}x_0 \in \mathcal{H}^n \tag{3.26}$$

$$\overline{z} = x_0 - (\hat{\imath}, \vec{x}), \quad \overline{\vec{z}} = \vec{x} - \hat{\imath}x_0,$$

consequentemente obtemos

$$x_0 = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \vec{x} = \operatorname{Re} \vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{z} + \overline{\vec{z}})$$

$$\vec{x} = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z\hat{\imath} - \hat{\imath}\overline{z}) = \frac{1}{2}(\hat{\imath}\overline{z} - z\hat{\imath}), \quad x_0 = \operatorname{Im} \vec{z} = \frac{1}{2n}(\vec{z} - \overline{\vec{z}}, \hat{\imath}) = \frac{1}{2n}(\hat{\imath}, \vec{z} - \overline{\vec{z}}),$$

onde $\vec{x}$ representa a parte real de $\vec{z}$ e x_0 a parte imaginária.

Comparando com o conceito de diferenciabilidade, na teoria de funções de n variáveis complexas, a aplicação de n variáveis monogénicas hipercomplexas conduz-nos à questão, se todos os produtos de z_k são também monogénicos ou não. Já sabemos que a resposta é negativa, pelo que apresentamos o seguinte exemplo: $f(z_1, z_2) = z_1z_2$ não é monogénica. Por este motivo introduziu-se no artigo (ver [22]) o produto permutacional.

Definição 3.2.11 *Seja $V_{+,\cdot}$ um anel comutativo ou não comutativo, $a_k \in V$ com $k = 1, \ldots, n$, então o "$\times$" - produto é definido por*

$$a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi(i_1,\ldots,i_n)} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}, \tag{3.27}$$

onde a soma percorre todas as permutações de todos os $(i_1, \ldots, i_n)$.

O n-ésimo produto (3.27) é o produto simétrico com as seguintes propriedades:

1. A operação é permutativa, ou seja, a permutação dos factores não altera o resultado.

2. Para anéis comutativos, em particular para $V = \mathbb{C}$ e $V = \mathbb{R}$, é simplesmente o produto ordinário de n elementos.

3. A operação é distributiva em relação à adição desde que V seja distributivo.

4. A permutabilidade, no caso de anéis não comutativos, é conseguida à custa da associatividade, por exemplo,
$$a_1 \times (a_2 \times a_3) \neq (a_1 \times a_2) \times a_3.$$

A perda da associatividade do produto simétrico é compensada para um certo grau por uma relação recursiva, que iremos referir mais adiante.

Teorema 3.2.12 *Para todos os inteiros $n \geq 1$*

$$a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = \frac{1}{n}\left[a_1(a_2 \times \ldots \times a_n) + \ldots + a_n(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1})\right] \tag{3.28}$$

e

$$a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = \frac{1}{n}\left[(a_2 \times \ldots \times a_n)a_1 + \ldots + (a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1})a_n\right]. \tag{3.29}$$

Demonstração:

Se agruparmos os elementos em (3.27), de acordo com o primeiro (ou último) factor a_k $(k = 1, \ldots, n)$, então o restante é exactamente

$$(n-1)!a_1 \times \ldots \times a_{k-1} \times a_{k+1} \times \ldots \times a_n,$$

o que prova o teorema.

■

Corolário 3.2.13 *Se $a_k \in \widetilde{\mathcal{C}l}_{0,n} \subset \mathcal{C}l_{0,n}$, $(k = 1, \ldots, n)$, então também $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n \in \widetilde{\mathcal{C}l}_{0,n}$.*

A demonstração segue da adição de (3.28) e (3.29), divisão por dois e adicionalmente por indução. Para o caso em que os factores se repetem no produto (3.27), estabelecemos:

Convenção

Se o factor a_j ocorre μ_j-vezes em (3.27) temos

$$\underbrace{a_1 \times \ldots \times a_1}_{\mu_1} \times \ldots \times \underbrace{a_n \times \ldots \times a_n}_{\mu_n} = a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n}, \tag{3.30}$$

e colocamos parênteses se as potências são entendidas no caso ordinário, isto é,

$$a_1^2 \times a_2 = a_1 \times a_1 \times a_2 = a_1 \times a_2 \times a_1 = a_2 \times a_1 \times a_1$$

mas

$$(a_1)^2 \times a_2 = (a_1 a_1) \times a_2 = (a_1 \times a_1) \times a_2.$$

Fórmula geral recursiva

Através do multi-índice $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, onde $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ e $\mu! = = \mu_1!\mu_2!\ldots\mu_n!$ a fórmula recursiva pode ser extendida para a seguinte expressão

$$\begin{aligned} &a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n} = \\ &\qquad = \frac{1}{|\mu|}\left[\mu_1 a_1 \left(a_1^{\mu_1-1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots a_n^{\mu_n}\right) + \ldots + \mu_n a_n \left(a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n-1}\right)\right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n} = \\ &\qquad = \frac{1}{|\mu|}\left[\mu_1 \left(a_1^{\mu_1-1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots a_n^{\mu_n}\right) a_1 + \ldots + \mu_n \left(a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n-1}\right) a_n\right]. \end{aligned}$$

Além disso, o produto permutacional é muito útil para generalizar a fórmula polinomial de um anel não comutativo.

Fórmula polinomial

Teorema 3.2.14 *Potências de uma soma de n elementos diferentes $a_1, \ldots, a_n$, de um anel V comutativo (ou não comutativo) arbitrário, podem ser desenvolvidas pelo produto simétrico na forma usual aplicando (3.30), isto é,*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^k = \sum_{|\mu|=k} \binom{k}{\mu} \overrightarrow{a}^{\mu},$$

onde $\binom{k}{\mu} = \dfrac{k!}{\mu!}$; $\overrightarrow{a}^{\mu} = a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n}$; $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Tendo em consideração a repetição de elementos em (3.30) obtemos pela Definição 3.2.11

$$a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2} \times \ldots \times a_n^{\mu_n} = \frac{\mu!}{|\mu|!} \sum_{\pi(i_1,\ldots,i_{|\mu|})} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{|\mu|}},$$

onde a soma percorre todas as permutações distintas. Isto prova o teorema.

■

Como exemplo temos

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2)^3 &= a_1^3 + (a_1a_1a_2 + a_1a_2a_1 + a_2a_1a_1) + (a_1a_2a_2 + a_2a_1a_2 + a_2a_2a_1) + a_2^3 \\ &= a_1^3 + 3a_1^2 \times a_2 + 3a_1 \times a_2^2 + a_2^3 \\ &= \sum_{|\mu|=3} \binom{3}{\mu} a_1^{\mu_1} \times a_2^{\mu_2}.\end{aligned}$$

Por outro lado, directamente pela multiplicação com o produto - $\times$

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2)^3 &= (a_1 + a_2) \times (a_1 + a_2) \times (a_1 + a_2) \\ &= a_1 \times a_1 \times a_1 + 3a_1^2 \times a_2 + 3a_1 \times a_2^2 + a_2 \times a_2 \times a_2.\end{aligned}$$

Relembramos que uma função $f = f(\vec{z}) \in \mathbb{C}_1(\Omega, \mathcal{C}\ell_{0,n})$ denomina-se por **diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita)** em Ω, se a função for aproximada numa vizinhança de $\vec{z} \in \Omega$ por uma aplicação $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ - linear à esquerda (à direita) de $\mathcal{H}^n$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, isto é,

$$f(\vec{z} + \Delta\vec{z}) - f(\vec{z}) = \Delta z_1 A_1 + \ldots + \Delta z_n A_n + o(\|\Delta\vec{z}\|) \tag{3.31}$$

$$f(\vec{z} + \Delta\vec{z}) - f(\vec{z}) = A_1 \Delta z_1 + \ldots + A_n \Delta z_n + o(\|\Delta\vec{z}\|), \tag{3.32}$$

onde $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{o(\|\Delta\vec{z}\|)}{\|\Delta\vec{z}\|} = 0$ e $A_k \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ com $k = 1, \ldots, n$. Os A_k são as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ e a diferenciabilidade hipercomplexa é equivalente à monogenicidade.

Teorema 3.2.15 *Suponhamos que $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ é um multi-índice arbitrário, $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$, então a função*

$$f(\vec{z}) = \vec{z}^{\mu} = z_1^{\mu_1} \times z_2^{\mu_2} \times \ldots \times z_n^{\mu_n} \tag{3.33}$$

é diferenciável hipercomplexa à esquerda e à direita.

Demonstração:

A demonstração segue por indução sobre $|\mu|$, com o auxílio da fórmula geral recursiva. Vamos apenas provar a diferenciabilidade hipercomplexa à direita, visto que a diferenciabilidade à esquerda é análoga. Para $|\mu| = 1$ é trivial. Supondo que para um arbitrário $|\mu|$, $\vec{z}^{\mu}$ é diferenciável hipercomplexo, isto é, por (3.32)

$$(\vec{z} + \Delta\vec{z})^{\mu} - \vec{z}^{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{z}^{\mu-\tau_i} \Delta z_i + o(\|\Delta\vec{z}\|), \tag{3.34}$$

onde τ_i é um multi-índice com 1 no lugar de i e zero nos restantes casos. Para o caso de $|\mu|$ até $|\mu| + 1$ utilizamos a segunda igualdade da fórmula geral recursiva (respectivamente, a primeira igualdade no caso da diferenciabilidade à esquerda), que resulta

$$\begin{aligned}(|\mu|+1)[(\vec{z}+\Delta\vec{z})^{\mu+\tau_k} - \vec{z}^{\mu+\tau_k}] &= \sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\delta_{ik})[(\vec{z}+\Delta\vec{z})^{\mu+\tau_k-\tau_i}(z_i+\Delta z_i) - \vec{z}^{\mu+\tau_k-\tau_i} z_i] = \\ = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\delta_{ik})\left[(\vec{z}+\Delta\vec{z})^{\mu+\tau_k-\tau_i} - \vec{z}^{\mu+\tau_k-\tau_i}\right] z_i &+ \sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\delta_{ik})(\vec{z}+\Delta\vec{z})^{\mu+\tau_k-\tau_i}\Delta z_i.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Atendendo à linearização do segundo termo do lado direito e com as propriedades do produto, temos

$$\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\delta_{ik})(\vec{z}+\Delta\vec{z})^{\mu+\tau_k-\tau_i}\Delta z_i = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\delta_{ik})\vec{z}^{\mu+\tau_k-\tau_i}\Delta z_i + o(\|\Delta\vec{z}\|).$$

Por (3.34) e pelo primeiro termo de (3.35)

$$\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\delta_{ik})[(\vec{z}+\Delta\vec{z})^{\mu+\tau_k-\tau_i} - \vec{z}^{\mu+\tau_k-\tau_i}]z_i = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ji}\Delta z_j z_i + o(\|\Delta\vec{z}\|),$$

onde

$$B_{ji} = (\mu_i+\delta_{ik})(\mu_j+\delta_{jk}-\delta_{ji})\vec{z}^{\mu+\tau_k-\tau_i-\tau_j},$$

para $k = 1, \ldots, n$. $B_{ji} = B_{ij}$ para todo $k = 1, \ldots, n$ onde $i \neq j$ e

$$(\Delta z_j)z_i + (\Delta z_i)z_j = z_i\Delta z_j + z_j\Delta z_i \qquad (i,\ j = 1, \ldots, n)$$

com $(i \neq j)$, respectivamente

$$\Delta z_i z_i = z_i \Delta z_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Finalmente, as últimas relações tornam possível representar o primeiro termo de (3.35), como uma combinação linear à direita de Δz_k, com $k = 1, \ldots, n$, o qual prova o teorema.

■

Na adição, o facto de $z_k = -z \times e_k,\ k = 1, \ldots, n$, exprime uma dependência explícita dos polinómios de Fueter (3.33), na variável usual $z \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$, nomeadamente

$$f(\vec{z}) = P_\mu(z) = (-1)^{|\mu|}(z \times e_1)^{\mu_1} \times (z \times e_2)^{\mu_2} \times \ldots \times (z \times e_n)^{\mu_n}. \tag{3.36}$$

Definição 3.2.16 *Seja $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ um multi-índice logo*

$$P(\vec{a}, \vec{z}) = \sum_\mu c_\mu (\vec{z} - \vec{a})^\mu$$

$$P(\vec{z}, \vec{a}) = \sum_\mu (\vec{z} - \vec{a})^\mu c_\mu,$$

*onde $c_\mu \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$, $\ \vec{a} = \vec{\alpha} + \alpha_0 \hat{\imath} \in \Omega \subset \mathcal{H}^n$, $((\alpha_0, \vec{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n+1})$, $a_k = \alpha_k e_0 - \alpha_0 e_k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ com $k = 1, \ldots, n$, são denominadas de **séries de potências hipercomplexas múltiplas à direita e respectivamente à esquerda**. Como séries de potências ordenadas pelos polinómios homogéneos, são também consideradas*

$$P(\vec{a}, \vec{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\mu|=k} c_\mu (\vec{z} - \vec{a})^\mu \right), \quad P(\vec{z}, \vec{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\mu|=k} (\vec{z} - \vec{a})^\mu c_\mu \right). \tag{3.37}$$

Em geral, vamos apenas considerar as séries de potências múltiplas à direita, com centro em $\vec{a} = 0$. A restrição de $\vec{z} \in \mathcal{H}^n$ para $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, conduz-nos directamente à usual série de potências em $\vec{x}^\mu$, cuja utilidade é fundamental na conexão com problemas de continuação analítica. A construção é similar a esta na teoria das funções complexas multidimensionais. Neste contexto, considera-se o domínio $U(r)$ em $\mathcal{H}^n$, da forma de acoplamento através de x_0 em forma de policilindros com (vector) - raios $\vec{r} = (r_1,\ r_2, \ldots, r_n)$ definidos por

$$U(\vec{r}) = \{\vec{z} \in \mathcal{H}^n : |z_k| = \left(x_0^2 + x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} < r_k, \quad k = 1, \ldots, n\}.$$

Teorema 3.2.17 *Com*

$$P(\vec{z}) = \sum_\mu c_\mu \vec{z}^\mu \tag{3.38}$$

consideramos

$$\widetilde{P}(\vec{z}) = \sum_\mu |c_\mu||\vec{z}^\mu|. \tag{3.39}$$

Se a série de potências formal real (3.39) converge para qualquer ponto $\vec{\zeta} \in \mathcal{H}^n$, então (3.38) converge absolutamente e uniformemente em qualquer subconjunto compacto $\mathbb{K}$ do policilindro $U(\vec{\rho})$ com raios $\vec{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n), \rho_k = |\zeta|, \quad k = 1, \ldots, n.$

A demonstração é idêntica ao caso das séries de potências múltiplas reais ou complexas. Tomando especial atenção a $|c_\mu \vec{z}^\mu| \leq 2^n |c_\mu||z_1|^{\mu_1} \ldots |z_n|^{\mu_n}$.

Do ponto de vista usual, ao considerar séries de potências em relação a $z \in \widetilde{\mathcal{C}\ell}_{0,n}$ é possível obter uma versão análoga do mesmo modo que $|\vec{z}^\mu| = |(z \times e_1)^{\mu_1} \times \ldots \times (z \times e_n)^{\mu_n}| \leq |z|^{|\mu|}$. Além disso, os domínios de convergência são bolas. Para séries de potências ordenadas da forma (3.37), uma fórmula de Cauchy-Hadamard análoga pode ser encontrada para raios de convergência na forma

$$r = \left(\overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\max_{|\mu|=k} |c_\mu| \right)^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}.$$

Usamos agora o método clássico para provar a diferenciabilidade hipercomplexa de (3.38). Pela diferenciação parcial formal de (3.38),

$$\frac{\partial P(\vec{z})}{\partial x_i} = \sum_\mu c_\mu \mu_i \vec{z}^{\mu-\tau_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.40}$$

Torna-se elementar verificar que (3.40) converge no mesmo domínio que $P(\vec{z})$ sendo uniformemente contínua em relação a $\vec{z}$, em qualquer subconjunto compacto $\mathbb{K} \subset U(\vec{r})$. Por outro lado, pelo Teorema 3.2.15,

$$(\vec{z} + \Delta\vec{z})^\mu - \vec{z}^\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{z}^{\mu-\tau_i} \Delta z_i + \eta_\mu(\|\Delta\vec{z}\|)\|\Delta\vec{z}\|, \tag{3.41}$$

onde $\eta_\mu(\|\Delta\vec{z}\|)$ em qualquer compacto $\mathbb{K}$ é continuamente dependente de $\|\Delta\vec{z}\|$ e $\eta_\mu \to 0$, quando $\|\Delta\vec{z}\| \to 0$.

Teorema 3.2.18 *Seja $P(\vec{a}, \vec{z})$ uma série de potências múltipla à direita. Se $P(\vec{a}, \vec{z})$ converge em algum domínio policilindrico da forma*

$$\mathcal{U}(\vec{r}, \vec{a}) = \left\{ \vec{z} \in \mathcal{H}^n : |z_k - a_k| = \left((x_0 - \alpha_0)^2 + (x_k - \alpha_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r_k \right\},$$

para $k = 1, \ldots, n$, então $P(\vec{a}, \vec{z})$ é diferenciável hipercomplexa à direita em $\mathcal{U}(\vec{r}, \vec{a})$ e as derivadas parciais em relação a x_k são obtidas pela diferenciação formal, como

$$\frac{\partial P(\vec{z})}{\partial x_k} = \sum_\mu c_\mu \mu_k (\vec{z} - \vec{a})^{\mu-\tau_k}, \tag{3.42}$$

onde τ_k é o multi-índice com 1 no lugar de k e zero nos outros casos, ou seja, $\tau_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Demonstração:

Seja $\vec{z} \in U(\vec{r})$ e ρ_k tal que

$$|z_k| < \rho_k < r_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

e

$$|\Delta z_k| \leq \rho_k - |z_k|,$$

então

$$|z_k + \Delta z_k| \leq |z_k| + |\Delta z_k| \leq \rho_k < r_k.$$

Consideramos

$$G(\Delta \vec{z}) = P(\vec{z} + \Delta \vec{z}) - P(\vec{z}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P(\vec{z})}{\partial x_i} \Delta z_i.$$

Recorrendo a (3.41),

$$G(\Delta \vec{z}) = \sum_{|\mu|=1} c_\mu \eta_\mu(\|\Delta \vec{z}\|)\|\Delta \vec{z}\| + \sum_{|\mu|=N} \left(\sum_{i=1}^{n} c_\mu \mu_i \vec{z}^{\mu - \tau_i} \Delta z_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|\mu|=N} \mu_i c_\mu \vec{z}^{\mu - \tau_i} \right) \Delta z_i$$

onde N é escolhido suficientemente grande, que para o resto temos

$$\sum_{|\mu|=N} |c_\mu \vec{z}^{\mu - \tau_i} \mu_i| < \frac{\varepsilon}{3m}, \tag{3.43}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $i = 1, \ldots, n$. Tendo em conta

$$\sum_{|\mu|=1} c_\mu \eta_\mu(\|\Delta \vec{z}\|) \to 0,$$

quando $\|\Delta \vec{z}\|$ converge uniformemente para zero, temos

$$\left| \sum_{|\mu|=1} c_\mu \eta_\mu(\|\Delta \vec{z}\|) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.44}$$

para $\|\Delta \vec{z}\| < \delta$ suficientemente pequeno. Se agora estimarmos a norma de $G(\Delta \vec{z})$, então de (3.43) e (3.44) segue

$$\frac{|G(\Delta \vec{z})|}{\|\Delta \vec{z}\|} \leq \left| \sum_{|\mu|=1} c_\mu \eta_\mu(\|\Delta \vec{z}\|) \right| + 2m \sum_{|\mu|=N} |c_\mu \mu_i \vec{z}^{\mu - \tau_i}| < \varepsilon,$$

quando $\|\Delta\vec{z}\| < \delta$. Assim provamos que

$$\lim_{\Delta\vec{z}\to 0} \frac{\left| P(\vec{z}+\Delta\vec{z}) - P(\vec{z}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_i}\Delta z_i \right|}{\|\Delta\vec{z}\|} = 0.$$

Pela definição da diferenciabilidade hipercomplexa, $\dfrac{\partial P}{\partial x_i}$ são as derivadas parciais de $P(\vec{z})$. Além disso, tendo em conta (3.40), estas também são funções monogénicas.

■

Por conseguinte, apresentamos uma definição indutiva da diferenciabilidade hipercomplexa à direita de ordens maiores (o caso de diferenciabilidade à esquerda é análogo). Assumindo que f'_R existe em qualquer ponto de $\Omega \subset \mathcal{H}^n$, então f'_R é uma função que atribui para qualquer $\vec{z} \in \Omega$ um elemento de $\mathcal{C}\ell_{1,n} = \mathcal{L}_R(\mathcal{H}^n, \mathcal{C}\ell_{0,n})$. Além disso $f(\vec{z})$ é uma função com valores $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ de $\vec{z}$, f'_R, uma função com valores $\mathcal{C}\ell_{1,n}$ de $\vec{z}$.

Definição 3.2.19 *Seja $f(\vec{z})$ uma aplicação contínua de uma vizinhança de $\vec{a} \in \mathcal{H}^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ e $\mathcal{C}\ell_{p,n} = \mathcal{L}_R(\mathcal{H}^n, \mathcal{C}\ell_{p-1,n})$, $p = 1, 2, \ldots$ como definida anteriormente. A aplicação $f(\vec{z})$ designa-se* ***p-vezes diferenciável hipercomplexa à direita em*** *$\vec{a}$ se existe uma aplicação $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ linear $\ell \in \mathcal{L}_R(\mathcal{H}^n, \mathcal{C}\ell_{p-1,n})$, tal que*

$$\lim_{\Delta\vec{z}\to 0} \frac{\left| f_R^{(p-1)}(\vec{a}+\Delta\vec{z}) - f_R^{(p-1)}(\vec{a}) - \ell(\Delta\vec{z}) \right|}{\|\Delta\vec{z}\|} = 0. \tag{3.45}$$

ℓ é denominada por ***p-ésima derivada à direita de*** *f* ***em*** *$\vec{a}$. Além disso, $f_R^{(p)}(\vec{a}) \in \mathcal{C}\ell_{p,n}$ e*

$$f_R^{(p)}(\vec{a}) = [f_R^{(p-1)}(\vec{z})]'_{\vec{z}=\vec{a}}.$$

A fórmula (3.42) mostra que as derivadas também representam funções monogénicas no mesmo domínio de convergência. Por indução segue:

Teorema 3.2.20 *Toda a série de potências generalizada à esquerda (à direita) é infinitamente diferenciável hipercomplexa à esquerda (à direita) no seu domínio de convergência.*

Calculando as derivadas parciais das potências generalizadas $(\vec{z}-\vec{a})^\mu$ em $\vec{z} = \vec{a}$, temos

$$\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial \vec{x}^\nu}(\vec{z}-\vec{a})^\mu = \begin{cases} \mu! & se \quad \nu = \mu \\ 0 & se \quad \nu \neq \mu \end{cases}.$$

O teorema pode ser extendido às funções monogénicas. Geralmente supõe-se que o inverso está provado, isto é, que qualquer função monogénica pode ser localmente expandida numa série de Taylor. De registar que a ordem dos zeros de $f(\vec{z})$ pode ser definida com o auxílio da Definição 3.2.19.

Teorema 3.2.21 *Toda a série de potências convergente à direita produz no interior do seu domínio de convergência uma função monogénica $f(\vec{z})$ e aí coincide com a série de Taylor de $f(\vec{z})$, ou seja, numa vizinhança de $\vec{z} = \vec{a}$*

$$f(\vec{z}) = \sum_{\mu} \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|} f(\vec{a})}{\partial \vec{x}^{\mu}} (\vec{z} - \vec{a})^{\mu}$$

e ordenada

$$f(\vec{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{|\mu|=k} \binom{k}{\mu} \frac{\partial^{|\mu|} f(\vec{a})}{\partial \vec{x}^{\mu}} (\vec{z} - \vec{a})^{\mu} \right)$$

(de modo idêntico para as séries à esquerda).

Além disso podemos obter a expressão para $z \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ na forma

$$f(\vec{z}) = \sum_{\mu} \frac{(-1)^{|\mu|}}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|} f(a)}{\partial \vec{x^{\mu}}} [(z-a) \times e_1]^{\mu_1} \times \ldots \times [(z-a) \times e_n]^{\mu_n}$$

ordenada

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{|\mu|}}{k!} \left(\sum_{|\mu|=k} \binom{k}{\mu} \frac{\partial^{|\mu|} f(a)}{\partial \vec{x}^{\mu}} [(z-a) \times e_1]^{\mu_1} \times \ldots \times [(z-a) \times e_n]^{\mu_n} \right).$$

Para determinar os coeficientes da série de Taylor de uma função monogénica, podemos formular o teorema da unicidade para séries de Taylor generalizadas.

Teorema 3.2.22 *Se os coeficientes de duas séries de Taylor generalizadas à direita (à esquerda) coincidem numa pequena vizinhança arbitrária do ponto comum do desenvolvimento $\vec{a}$, então coincidem identicalmente.*

3.3 Extensão Cauchy-Kowalewskaya

O teorema da unicidade é a base para a extensão de Cauchy-Kowalewskya de uma função com valores $\mathcal{C}l_{0,n}$ real-analítica em $\mathbb{R}^n$, dada pelo seguinte resultado.

Teorema 3.3.1 *Seja $f(\vec{x})$ real analítica no paralelepípedo*

$$\mathcal{V}(\vec{r}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |x_k| < r_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Então uma continuação analítica de f para uma função monogénica à direita ou à esquerda em

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \{\vec{z} \in \mathcal{H}^n : |z_k| < r_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

é dada de uma forma única pela função

$$f_R^*(\vec{z}) = \sum_{|\mu|=0} \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|} f(0)}{\partial \vec{x}^\mu} \vec{z}^\mu \tag{3.46}$$

respectivamente

$$f_L^*(\vec{z}) = \sum_{\mu} \vec{z}^\mu \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|} f(0)}{\partial \vec{x}^\mu} \tag{3.47}$$

onde

$$f_R^*(\vec{z})|_{x_0=0} = f_L^*(\vec{z})|_{x_0=0} = f^*(\vec{z})|_{\mathbb{R}^n} = f(\vec{x}).$$

Demonstração:

Dentro de $\mathcal{V}(\vec{r})$, a função $f(\vec{x})$ tem a representação numa série de Taylor

$$f(\vec{x}) = \sum_{|\mu|=0} \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|} f(0)}{\partial \vec{x}^\mu} \vec{x}^\mu \tag{3.48}$$

e

$$f_R^*(\vec{z})|_{x_0=0} = f_L^*(\vec{z})|_{x_0=0} = f^*(\vec{z})|_{\mathbb{R}^n} = f(\vec{x}) \tag{3.49}$$

torna-se óbvio. A convergência de (3.46) e respectivamente a de (3.47), em $\mathcal{U}(\vec{r})$ é garantida pela convergência de (3.48) em $\mathcal{V}(\vec{r})$ e a unicidade surge do teorema de unicidade para séries de potências generalizadas.

■

As funções $f_R^*(\vec{z})$ e $f_L^*(\vec{z})$ são designadas de extensões de Cauchy-Kowalewskaya à direita (respectivamente à esquerda). Com o auxílio da extensão de Cauchy-Kowalewskaya o seu produto, referido por Delanghe em [8], pode ser definido por

$$f \odot g = (f(\overrightarrow{z})|_{x_0=0} \cdot g(\overrightarrow{z})|_{x_0=0})^*.$$

Então a utilização de $\mathcal{H}^n$ permite um tratamento bastante fácil do produto de Cauchy-Kowalewskaya de duas séries de potências à direita P e Q da forma

$$P(\vec{z}) = \sum_{|\mu|=0} c_\mu (\vec{z})^\mu$$

e

$$Q(\vec{z}) = \sum_{|\nu|=0} d_\nu (\vec{z})^\nu.$$

O produto de Cauchy-Kowalewskaya é simplesmente dado pela série de potências formal à direita da forma

$$P \odot_R Q(\vec{z}) = \sum_{|\sigma|=0} b_\sigma \vec{z}^\sigma$$

com coeficientes

$$b_\sigma = \sum_{\mu+\nu=\sigma} c_\mu \cdot d_\nu.$$

Análogamente, o produto de Cauchy-Kowalewskaya de duas séries de potências formais à esquerda, pode ser obtido.

Uma aplicação imediata da extensão de Cauchy-Kowalewskaya é a passagem da representação de uma função $f(x)$ monogénica à direita, dada na forma de uma série em termos das variáveis reais $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$, para a sua representação em termos das variáveis hipercomplexas $z_1, \ldots, z_n$. Considerando a sua restrição ao hiperplano $x_0 = 0$ obtemos a fórmula (3.48) de $f(\vec{x}) = f(x)|_{x_0=0}$. Substituindo $\vec{x}$ por $\vec{z}$ como na fórmula (3.46) obtemos a continuação de $f(\vec{x})$ para $\mathbb{R}^{n+1}$ na forma $f_R^*(\vec{z})$. Uma vez que a função $f(x)$ coincide com f_R^* (teorema da unicidade), pelo facto de ser monogénica à direita, através deste processo obtemos a sua representação (mais concretamente a sua representação em forma de série) em termos das variáveis $z_1, \ldots, z_n$. Por analogia trata-se do caso de uma função monogénica à esquerda e sua representação numa série à esquerda. O método descrito vai ser utilizado no próximo capítulo.

Capítulo 4

Funções monogénicas em termos de duas variáveis hipercomplexas

4.1 A definição de funções monomiais particulares

A função monomial de grau k em relação à variável hipercomplexa $x = x_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ e ao seu conjugado $\bar{x} = x_0 - x_1e_1 - \ldots - x_ne_n$ ($n \geq 2$, arbitrário) é definida por

$$P^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{k} T_s^k x^{k-s} \bar{x}^s, \tag{4.1}$$

onde

$$T_s^k = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}}{(k-s)!} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_s}{s!} \quad \text{e } k = 0, 1, \ldots. \tag{4.2}$$

Em [9], Falcão, Cruz e Malonek mostram que a função monomial $P^{(k)}(x)$ é monogénica.

4.2 Propriedades dos T_s^k

Antes de avançarmos para o estudo dos T_s^k demonstramos algumas relações do símbolo de Pochhammer, que serão necessárias na formulação das suas propriedades.

São várias as factorizações para a expressão $(a)_{n-l}$. Para qualquer $a \in \mathcal{F}$ e quaisquer n, l inteiros não negativos:

$$(a)_{n-l} = (a)_l (a+l)_{n-2l} \tag{4.3}$$

uma vez que, $(a)_l(a+l)_{n-2l} = a(a+1)\dots(a+l-1)(a+l)\dots(a+l+n-2l-1)$
$= a(a+1)\dots(a+n-l-1) = (a)_{n-l}$.

$$(a)_{n-l} = (a)_{n-l-1}(a+n-l-1) \tag{4.4}$$

pois, $(a)_{n-l-1}(a+n-l-1) = a(a+1)\dots(a+n-l-2)(a+n-l-1) = (a)_{n-l}$.

$$(a)_{n-l} = (a)_{l-1}(a+l-1)_{n-2l+1} \tag{4.5}$$

uma vez que, $(a)_{l-1}(a+l-1)_{n-2l+1} = a(a+1)\dots(a+l-2)(a+l-1)\dots(a+l-1+n-2l+1-1)$
$= a(a+1)\dots(a+n-l-1) = (a)_{n-l}$.

Por sua vez,

$$\frac{(a+l+1)_{n-2l}}{(a+l)_{n-2l}} = \frac{a+n-l}{a+l} \tag{4.6}$$

pois, $\displaystyle\frac{(a+l+1)_{n-2l}}{(a+l)_{n-2l}} = \frac{(a+l+1)\dots(a+l+1+n-2l-2)(a+l+1+n-2l-1)}{(a+l)(a+l+1)\dots(a+l+n-2l-1)}$
$\displaystyle= \frac{a+n-l}{a+l}$.

No estudo dos T_s^k podemos observar uma alusão ao triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc} & & & T_0^0 & & & \\ & & T_0^1 & & T_1^1 & & \\ & T_0^2 & & T_1^2 & & T_2^2 & \\ T_0^3 & & T_1^3 & & T_2^3 & & T_3^3 \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

onde podemos verificar as propriedades que se seguem, que são semelhantes às propriedades dos coeficientes binomiais.

Propriedade 4.2.1 *A relação entre dois elementos consecutivos de uma linha com um elemento da linha anterior é dada por*

$$(k-s)T_s^k + (s+1)T_{s+1}^k = (n+k-1)T_s^{k-1}, k > s,\ n = 1, 2, \ldots.$$

<u>Prova</u>:

$$(k-s)T_s^k + (s+1)T_{s+1}^k = (k-s)\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}}{(k-s)!}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_s}{s!} +$$

$$+(s+1)\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}}{(k-s-1)!}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{s+1}}{(s+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(k-s-1)!s!}\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}\left(\frac{n-1}{2}\right)_s + \left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)_{s+1}\right]$$

uma vez que por (4.4), $\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s} = \left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{n+2k-2s-1}{2}\right)$ e por (1.26), $\left(\frac{n-1}{2}\right)_{s+1} = \left(\frac{n-1}{2}\right)_s\left(\frac{n+2s-1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{(k-s-1)!s!}\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{n+2k-2s-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)_s +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)_s\left(\frac{n+2s-1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{n+k-1}{(k-s-1)!s!}\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)_s = (n+k-1)T_s^{k-1}.$$

■

Propriedade 4.2.2 *A relação entre o primeiro e o último elemento de uma linha, o segundo e o penúltimo elemento de uma linha e assim sucessivamente é dada por*

$$T_{k-s}^k = \frac{2s+n-1}{2(k-s)+n-1}T_s^k,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Para $n = 1$, $k \neq s$.

Prova:

$$\frac{2s+n-1}{2(k-s)+n-1}T_s^k = \frac{2s+n-1}{2(k-s)+n-1}\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}}{(k-s)!}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_s}{s!}$$

uma vez que por (4.3), $\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s} = \left(\frac{n+1}{2}\right)_s\left(\frac{n+1}{2}+s\right)_{k-2s}$ e $\left(\frac{n-1}{2}\right)_s = \dfrac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-s}}{\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s}}$, para $\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s} \neq 0$

$$= \frac{2s+n-1}{2(k-s)+n-1}\frac{1}{(k-s)!s!}\left(\frac{n+1}{2}\right)_s\left(\frac{n+1}{2}+s\right)_{k-2s}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-s}}{\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s}}$$

uma vez que por (4.6), $\dfrac{\left(\frac{n+1}{2}+s\right)_{k-2s}}{\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s}} = \dfrac{n-1+2k-2s}{n-1+2s}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2s+n-1}{2(k-s)+n-1}\frac{1}{(k-s)!s!}\left(\frac{n+1}{2}\right)_s\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-s}\frac{n-1+2k-2s}{n-1+2s} \\ &= \frac{1}{(k-s)!s!}\left(\frac{n+1}{2}\right)_s\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-s} = T_{k-s}^k. \end{aligned}$$

■

Propriedade 4.2.3 *A relação entre dois elementos consecutivos que se encontram na diagonal (partindo da esquerda para a direita) é dada por*

$$T_s^k = \frac{n+2s-3}{2s}T_{s-1}^{k-1},\ s \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Prova:

$$\frac{n+2s-3}{2s}T_{s-1}^{k-1} = \frac{n+2s-3}{2s}\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}}{(k-s)!}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{s-1}}{(s-1)!}$$

uma vez que por (4.4), $\left(\frac{n-1}{2}\right)_{s-1} = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_s}{\left(\frac{n-1}{2}+s-1\right)}$, para $s \neq \frac{3-n}{2}$

$$= \frac{n+2s-3}{2s}\frac{1}{(k-s)!(s-1)!}\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_s}{\left(\frac{n-1}{2}+s-1\right)}$$

$$= \frac{1}{(k-s)!s!}\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}\left(\frac{n-1}{2}\right)_s = T_s^k.$$

■

Propriedade 4.2.4 *A relação entre dois elementos consecutivos de uma linha é dada por*

$$T_{s+1}^k = T_s^k \frac{k-s}{2(k-s)+n-1}\frac{2s+n-1}{s+1},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Para $n = 1$, $k \neq s$.

Prova:

$$T_s^k \frac{k-s}{2(k-s)+n-1}\frac{2s+n-1}{s+1} = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}}{(k-s)!}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_s}{s!}\frac{k-s}{2(k-s)+n-1}\frac{2s+n-1}{s+1}$$

uma vez que por (4.4), $\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s} = \left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{n-1}{2}+k-s\right)$

$$= \frac{1}{(k-s)!s!}\frac{k-s}{2(k-s)+n-1}\frac{2s+n-1}{s+1}\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{n-1}{2}+k-s\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)_s$$

uma vez que por (1.26), $\left(\frac{n-1}{2}\right)_s = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{s+1}}{\left(\frac{n-1}{2}+s\right)}$, para $s \neq -\frac{n-1}{2}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(k-s)!s!}\frac{k-s}{2}\frac{2s+n-1}{s+1}\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{s+1}}{\left(\frac{n-1}{2}+s\right)}\\
&= \frac{1}{(k-s)!s!}\frac{k-s}{s+1}\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)_{s+1}\\
&= \frac{1}{(k-s-1)!(s+1)!}\left(\frac{n-1}{2}\right)_{s+1}\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s-1} = T^k_{s+1}.
\end{aligned}
$$

■

Propriedade 4.2.5 *A relação entre o segundo e o último elemento de uma linha, o terceiro e o penúltimo elemento de uma linha, e assim sucessivamente é dada por*

$$T^k_s = \frac{k-s+1}{s}T^k_{k-s+1},\ s \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
\frac{k-s+1}{s}T^k_{k-s+1} &= \frac{k-s+1}{s}\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{s-1}}{(s-1)!}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-s+1}}{(k-s+1)!}\\
&= \frac{1}{(k-s)!s!}\left(\frac{n+1}{2}\right)_{s-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-s+1}
\end{aligned}
$$

uma vez que por (4.5), $\left(\frac{n+1}{2}\right)_{s-1} = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}}{\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s+1}}$, para $\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s+1} \neq 0$

$$= \frac{1}{(k-s)!s!}\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}}{\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s+1}}\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-s+1}$$

uma vez que por (4.3), $\left(\frac{n-1}{2}\right)_{k-s+1} = \left(\frac{n-1}{2}\right)_s\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s+1}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(k-s)!s!}\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}}{\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s+1}}\left(\frac{n-1}{2}\right)_s\left(\frac{n-1}{2}+s\right)_{k-2s+1}\\
&= \frac{1}{(k-s)!s!}\left(\frac{n+1}{2}\right)_{k-s}\left(\frac{n-1}{2}\right)_s = T^k_s.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Propriedade 4.2.6 *A soma dos coeficientes T_s^k é dada por*

$$\sum_{s=0}^{k} T_s^k = \frac{(n)_k}{k!},\ n = 1, 2, \ldots$$

Prova:

Denota-se $\sigma_k := \sum_{s=0}^{k} T_s^k$. Usando a Propriedade 4.2.1,

$$\sum_{s=0}^{k-1}(k-s)T_s^k + \sum_{s=0}^{k-1}(s+1)T_{s+1}^k = \sum_{s=0}^{k-1}(n+k-1)T_s^{k-1},$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{k-1} kT_s^k + \sum_{s=0}^{k-1}\left[(s+1)T_{s+1}^k - sT_s^k\right] &= (n+k-1)\sigma_{k-1} \Leftrightarrow \sum_{s=0}^{k-1} kT_s^k + kT_k^k = (n+k-1)\sigma_{k-1} \\ \Leftrightarrow \sum_{s=0}^{k} kT_s^k &= (n+k-1)\sigma_{k-1}.\end{aligned}$$

Então provámos que $\sigma_k = \frac{n+k-1}{k}\sigma_{k-1}$, o que significa

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \frac{n+k-1}{k}\sigma_{k-1} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)}{k(k-1)}\sigma_{k-2} = \ldots = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n}{k(k-1)\ldots 1}\sigma_0 \\ &= \frac{(n)_k}{k!}.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Propriedade 4.2.7 *Para $n = 2$, a soma alternada dos coeficientes T_s^k é dada por*

$$\sum_{s=0}^{k} T_s^k(-1)^s = \frac{(2m+1)!!}{(2m)!!} = \begin{cases} \dfrac{(k+1)!!}{k!!} & se \quad k \text{ é par}, \\[2ex] \dfrac{k!!}{(k-1)!!} & se \quad k \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Prova:

Denota-se $c^{k-1} := \sum_{s=0}^{k-1} T_s^{k-1}(-1)^s$ e $c^k := \sum_{s=0}^{k} T_s^k(-1)^s$, logo

$$c^k = T_0^k - T_1^k + T_2^k - \ldots + (-1)^{k-1}T_{k-1}^k + (-1)^k T_k^k.$$

Pela Propriedade 4.2.1, $(k+1)T_s^{k-1} = (k-s)T_s^k + (s+1)T_{s+1}^k$, assim

$$\begin{aligned}
(k+1)T_0^{k-1} &= kT_0^k + 1T_1^k \\
-(k+1)T_1^{k-1} &= -(k-1)T_1^k - 2T_2^k \\
(k+1)T_2^{k-1} &= (k-2)T_2^k + 3T_3^k \\
-(k+1)T_3^{k-1} &= -(k-3)T_3^k - 4T_4^k \\
&\vdots \\
(-1)^{k-2}(k+1)T_{k-2}^{k-1} &= (-1)^{k-2}(k-k+2)T_{k-2}^k + (-1)^{k-2}(k-1)T_{k-1}^k \\
(-1)^{k-1}(k+1)T_{k-1}^{k-1} &= (-1)^{k-1}(k-k+1)T_{k-1}^k + (-1)^{k-1}kT_k^k
\end{aligned}$$

e por sua vez,

$$\begin{aligned}
(k+1)c^{k-1} &= kc^k + 2T_1^k - 2.2T_2^k + 2.3T_3^k + \ldots + (-1)^k 2(k-1)T_{k-1}^k + (-1)^{k-1}2kT_k^k \\
&= kc^k + x_k,
\end{aligned}$$

onde $x_k = 2\left[T_1^k - 2T_2^k + 3T_3^k + \ldots + (-1)^k(k-1)T_{k-1}^k + (-1)^{k-1}kT_k^k\right]$.

Para $k = 2m$

$$x_{2m} = 2\left[T_1^{2m} - 2T_2^{2m} + 3T_3^{2m} + \ldots + (2m-1)T_{2m-1}^{2m} - 2mT_{2m}^{2m}\right].$$

Pela Propriedade 4.2.5, $sT_s^k - (k-(s-1))T_{k-(s-1)}^k = 0$,

$$\begin{aligned}
1T_1^{2m} - 2mT_{2m}^{2m} &= 0 \\
-2T_2^{2m} + (2m-1)T_{2m-1}^{2m} &= 0
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Logo, $x_{2m} = 0$.

Para $k = 2m+1$

$$x_{2m+1} = 2\left[T_1^{2m+1} - 2T_2^{2m+1} + 3T_3^{2m+1} + \ldots - (2m)T_{2m}^{2m+1} + (2m+1)T_{2m+1}^{2m+1}\right].$$

Pela Propriedade 4.2.3, $(2s)T_s^k = (2s-1)T_{s-1}^{k-1}$, logo

$$\begin{aligned}
x_{2m+1} &= T_0^{2m} - 3T_1^{2m} + 5T_2^{2m} - \ldots - (4m-1)T_{2m-1}^{2m} + (4m+1)T_{2m}^{2m} \\
&= c^{2m} - 2\left[T_1^{2m} - 2T_2^{2m} + \ldots + (2m-1)T_{2m-1}^{2m} - (2m)T_{2m}^{2m}\right] \\
&= c^{2m} - x_{2m} = c^{2m}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$(k+1)c^{k-1} = \begin{cases} kc^k & \text{se} \quad k = 2m, \\ kc^k + c^{k-1} & \text{se} \quad k = 2m+1. \end{cases}$$

Para $k = 2m$

$$(2m+1)c^{2m-1} = 2mc^{2m} \Leftrightarrow c^{2m} = \frac{2m+1}{2m}c^{2m-1},$$

para $k = 2m+1$

$$(2m+2)c^{2m} = (2m+1)c^{2m+1} + c^{2m} \Leftrightarrow c^{2m+1} = c^{2m}.$$

Logo,

$$c^k = \sum_{s=0}^{k} T_s^k (-1)^s = \frac{(2m+1)!!}{(2m)!!} = \begin{cases} \dfrac{(k+1)!!}{k!!} & \text{se} \quad k \text{ é par}, \\ \\ \dfrac{k!!}{(k-1)!!} & \text{se} \quad k \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

■

4.3 Derivada hipercomplexa de uma função monomial

Neste ponto será apresentada a derivada hipercomplexa de $P^{(k)}(x)$. Pelo facto do polinómio ser uma função monogénica, esta derivada coincide com a derivada em relação a x_0.

$$DP = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + e_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)P = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x_0} = \left(-e_1\frac{\partial P}{\partial x_1} - \ldots - e_n\frac{\partial P}{\partial x_n}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\overline{D}P = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - e_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \ldots - e_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)P = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right)P = \frac{\partial}{\partial x_0}P.$$

Lema 4.3.1 *A derivada hipercomplexa de $P^{(k)}(\boldsymbol{x})$ é obtida da seguinte forma:*

$$\frac{\partial}{\partial x_0}P^{(k)}(\boldsymbol{x}) = (n+k-1)P^{(k-1)}(\boldsymbol{x}),\, para\, k = 1,\ 2,\ 3, \ldots \quad e \quad n = 1, 2,\ 3, \ldots.$$

Demonstração:

Para $n = 1$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}P^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\sum_{s=0}^{k} T_s^k \mathbf{x}^{k-s}\bar{\mathbf{x}}^s\right) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\left(T_0^k\mathbf{x}^k + T_1^k\mathbf{x}^{k-1}\bar{\mathbf{x}} + \ldots + T_{k-1}^k\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}^{k-1} + T_k^k\bar{\mathbf{x}}^k\right).$$

Verificamos que

$$T_s^k = \frac{(-1)_{k-s}}{(k-s)!}\frac{(0)_s}{s!} = \begin{cases} \dfrac{(1)_k}{k!} = 1 & \text{se} \quad s = 0 \\ \quad 0 & \text{se} \quad s = 1, \ldots, k \end{cases},$$

logo, $P^k(x) = T_0^k x^k = x^k$.

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x_0}P^{(k)}(x) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(x^k\right) = kx^{k-1}. \tag{4.7}$$

Por sua vez, com base no lado direito da relação expressa no lema, temos

$$kP^{(k-1)}(x) = kT_0^{k-1}x^{k-1} = kx^{k-1}. \tag{4.8}$$

Comparando (4.7) e (4.8) observamos que para $n = 1$ reduz-se a $\dfrac{\partial}{\partial x_0}P^{(k)}(x) = kP^{(k-1)}(x)$.

Para $n = 2,\ 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_0}P^{(k)}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\sum_{s=0}^{k} T_s^k\mathbf{x}^{k-s}\bar{\mathbf{x}}^s\right) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(T_0^k\mathbf{x}^k + T_1^k\mathbf{x}^{k-1}\bar{\mathbf{x}} + \ldots + T_{k-1}^k\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}^{k-1} + T_k^k\bar{\mathbf{x}}^k\right) \\
&= \mathbf{x}^{k-1}\left(kT_0^k + T_1^k\right) + \mathbf{x}^{k-2}\left((k-1)T_1^k\bar{\mathbf{x}} + 2T_2^k\bar{\mathbf{x}}\right) + \ldots + \mathbf{x}\left(2T_{k-2}^k\bar{\mathbf{x}}^{k-2} + (k-1)T_{k-1}^k\bar{\mathbf{x}}^{k-2}\right) + \\
&\qquad + \mathbf{x}^0\left(T_{k-1}^k\bar{\mathbf{x}}^{k-1} + kT_k^k\bar{\mathbf{x}}^{k-1}\right) = \\
&= \sum_{s=0}^{k-1}\mathbf{x}^{k-s-1}\bar{\mathbf{x}}^s\left((k-s)T_s^k + (s+1)T_{s+1}^k\right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pela Propriedade 4.2.1, temos

$$(k-s)T_s^k + (s+1)T_{s+1}^k = (n+k-1)T_s^{k-1},$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_0} P^{(k)}(\mathbf{x}) &= \sum_{s=0}^{k-1} \mathbf{x}^{k-s-1}\bar{\mathbf{x}}^s (n+k-1)T_s^{k-1} \\
&= (n+k-1)P^{(k-1)}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

■

4.4 O caso $n = 2$ em termos de variáveis totalmente regulares

O objectivo deste ponto consiste na alteração das variáveis não monogénicas x e $\overline{x}$ pelas variáveis hipercomplexas monogénicas.

Utilizando (4.1), obtemos os seguintes casos particulares, para $n = 2$:

$$P^{(0)}(\mathbf{x}) = 1$$

$$P^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{3}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{x}}$$

$$P^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{15}{8}\mathbf{x}^2 + \frac{3}{4}\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} + \frac{3}{8}\bar{\mathbf{x}}^2$$

$$P^{(3)}(\mathbf{x}) = \frac{35}{16}\mathbf{x}^3 + \frac{15}{16}\mathbf{x}^2\bar{\mathbf{x}} + \frac{9}{16}\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}^2 + \frac{5}{16}\bar{\mathbf{x}}^3$$

$$P^{(4)}(\mathbf{x}) = \frac{315}{128}\mathbf{x}^4 + \frac{35}{32}\mathbf{x}^3\bar{\mathbf{x}} + \frac{45}{64}\mathbf{x}^2\bar{\mathbf{x}}^2 + \frac{15}{32}\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}^3 + \frac{35}{128}\bar{\mathbf{x}}^4$$

Para obtermos $P^{(k)}(\mathbf{x})$, em termos de z_1 e z_2, será utilizada a extensão de Cauchy-Kowalewskaya (Teorema 3.3.1).

Sejam $x = x_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ e $\underline{x} = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, então $x = x_0 + \underline{x}$, logo

$$x^{k-s}\bar{x}^s|_{x_0=0} = \underline{x}^{k-s}(-\underline{x})^s = \underline{x}^{k-s}(-1)^s\underline{x}^s = (-1)^s\underline{x}^k.$$

Então, com base na Propriedade 4.2.7, relativa à soma alternada dos coeficientes T_s^k, observamos que a função (4.1), restringida a $x_0 = 0$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$P^{(k)}(x)|_{x_0=0} = \sum_{s=0}^{k} T_s^k(-1)^s\underline{x}^k = \underline{x}^k\left(\sum_{s=0}^{k} T_s^k(-1)^s\right) = \underline{x}^k c^k,$$

$$\text{onde } c^k = \begin{cases} \frac{(k+1)!!}{k!!} & \text{se} \quad k \text{ é par,} \\ \frac{k!!}{(k-1)!!} & \text{se} \quad k \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{4.10}$$

Usando a fórmula polinomial (Teorema 3.2.14) para a potência da parte vectorial de x, a função monomial $P^{(k)}(x)$, tem a forma

$$P^{*(k)}(\underline{x}) = c_k \sum_{|\mu|=k} \binom{k}{\mu} x_1^{\mu_1} \cdot x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n} \cdot e_1^{\mu_1} \times e_2^{\mu_2} \times \ldots \times e_n^{\mu_n}.$$

Na forma usual, substituindo os produtos $x_1^{\mu_1} \cdot x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}$ por $z_1^{\mu_1} \times z_2^{\mu_2} \times \ldots \times z_n^{\mu_n}$, a extensão de Cauchy-Kowalevskaya de $P^{*(k)}(\vec{x}) \cong P^{*(k)}(\underline{x})$ é obtida como

$$P^{*(k)}(\vec{x}) = P^{(k)}(\vec{z}) = c^k \sum_{|\mu|=k} z_1^{\mu_1} \times z_2^{\mu_2} \times \ldots \times z_n^{\mu_n} \cdot \binom{k}{\mu} e_1^{\mu_1} \times e_2^{\mu_2} \times \ldots \times e_n^{\mu_n}. \tag{4.11}$$

Devido ao teorema da unicidade para as séries de Taylor de uma função monogénica, $P^{(k)}(\vec{z})$ coincide com a função monogénica inicial $P^{(k)}(x)$.

Então os casos particulares apresentados anteriormente para $n = 2$, em termos de z_1 e z_2, são dados por

$$P^{*(0)}(\vec{z}) = 1$$

$$P^{*(1)}(\vec{z}) = z_1e_1 + z_2e_2$$

$$P^{*(2)}(\vec{z}) = -\frac{3}{2}\left(z_1^2 + z_2^2\right)$$

$$P^{*(3)}(\vec{z}) = -\frac{3}{2}\left(z_1^3 e_1 + z_2^3 e_2 + z_1^2 \times z_2 e_2 + z_2^2 \times z_1 e_1\right)$$

$$P^{*(4)}(\vec{z}) = \frac{15}{8}\left(z_1^4 + z_2^4\right) + \frac{15}{4} z_1^2 \times z_2^2,$$

onde $z_k = x_k - x_0 e_k$, para $k = 1, \ldots, n$.

4.5 Séries hipergeométricas hipercomplexas em termos de funções monomiais

Neste ponto utilizaremos uma abordagem às séries hipergeométricas através de séries de potências em termos de funções monomiais. Iniciamos com a função monomial

$$\mathcal{P}^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{k} \mathcal{T}_s^k x^{k-s} \bar{x}^s, \tag{4.12}$$

onde os $\mathcal{T}_s^k$ são coeficientes modificados em relação aos estudados anteriormente. A modificação tem como objectivo adaptar as funções monomiais a certas condições, que permitam obter séries hipergeométricas particulares no âmbito da Análise de Clifford. Os $\mathcal{P}^{(k)}$, para $k = 0, 1, \ldots$ formam um conjunto bastante restricto de polinómios homogéneos monogénicos, devido ao facto dos polinómios gerais homogéneos monogénicos à direita (respectivamente monogénicos à esquerda) terem a forma

$$\mathcal{P}^{(k)}(x) = \sum_{|\nu|=k} c_\nu \vec{z}^\nu \quad \left(\text{ou } \mathcal{P}^{(k)}(x) = \sum_{|\nu|=k} \vec{z}^\nu c_\nu, \text{ respectivamente}\right),$$

onde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$, $\vec{z}^\nu = z_1^{\nu_1} \times z_2^{\nu_2} \times \ldots \times z_n^{\nu_n}$, com $z_k := x_k - x_0 e_k$; $k = 1, \ldots, n$, no sentido do produto permutacional, com $\mathbf{c}_\nu \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$.

Mas o importante é definir polinómios $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ que se comportem como funções monomiais no sentido das potências complexas $z^k = (x_0 + ix_1)^k$, para $k = 1, 2, \ldots$ e permitam uma construção de funções especiais monogénicas como séries da forma

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathcal{P}^{(k)}(x) \quad \left(\text{ou } \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^{(k)}(x) a_k, \text{ respectivamente}\right),$$

com coeficientes devidamente escolhidos. Notamos que no caso complexo $n = 1$, $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ pode ser escolhido na forma (4.12) simplesmente tomando $\mathcal{T}_0^k = 1$ e $\mathcal{T}_s^k = 0$, para $s > 0$ (uma vez que as funções holomorfas em $\mathbb{C}$ tem uma expansão em série, que envolve apenas $z = x_0 + ix_1$ e não envolve a variável conjugada $\bar{z} = x_0 - ix_1$). Para $n > 1$, os $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ dependem obviamente dos valores dos $\mathcal{T}_s^k$ que têm de ser definidos, de tal forma que todos os $\mathcal{P}^{(k)}$ sejam monogénicos.

Vamos analisar os polinómios $\mathcal{P}^{(k)}$ de grau $k = 0$ e $k = 1$, com $n \geq 2$ arbitrário, deduzir uma propriedade geral de recursividade para o conjunto $\left\{\mathcal{T}_s^k\right\}_{s=0}^k$ e considerar o caso $n = 2$ de forma mais completa, incluindo a construção de uma função exponencial diferente das normalmente consideradas.

É óbvio que para $k = 0$, temos $\mathcal{P}^{(0)} = \mathcal{T}_0^0$ e uma vez que temos interesse em manter, tanto quanto possível, as propriedades do conjunto $\left\{z^k\right\}_{k=0}^\infty$, $z \in \mathbb{C}$, normalizamos o conjunto $\left\{\mathcal{P}^{(k)}\right\}_{s=0}^k$, escolhendo $\mathcal{T}_0^0 = 1$. O caso $k = 1$ corresponde a

$$\mathcal{P}^{(1)}(x) = \mathcal{T}_0^1 x + \mathcal{T}_1^1 \bar{x}, \quad \mathcal{T}_0^1,\ \mathcal{T}_1^1 \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Exigindo que $\mathcal{P}^{(1)}(x)$ seja monogénico (precisamos apenas de tratar um dos casos de monogenicidade à esquerda ou à direita, uma vez que $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ é monogénico em ambos os lados, com o mesmo coeficiente $\mathcal{T}_k^s$), segue

$$\begin{aligned} 0 = D\mathcal{P}^{(1)} &= \mathcal{T}_0^1 + \mathcal{T}_1^1 + e_1(\mathcal{T}_0^1 e_1 - \mathcal{T}_1^1 e_1) + \ldots + e_n(\mathcal{T}_0^1 e_n - \mathcal{T}_1^1 e_n) \\ &= (1-n)\mathcal{T}_0^1 + (1+n)\mathcal{T}_1^1. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Como uma segunda condição, para a determinação única de $\mathcal{T}_0^1$ e $\mathcal{T}_1^1$ podemos fixar o valor de $\mathcal{P}^{(1)}(x)$ no ponto $x = 1$ exigindo que

$$\mathcal{P}^{(1)}(1) = 1 = \mathcal{T}_0^1 + \mathcal{T}_1^1. \tag{4.15}$$

Parece bastante natural fazer o mesmo para todos os graus de homogenicidade, isto é, para $k = 0, 1, 2, \ldots$ onde se impõe que $\mathcal{P}^{(k)}(1) = 1$, como $z^k|_{z=1} = 1$.
As fórmulas (4.14) e (4.15) juntas implicam

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{T}_0^1 + \mathcal{T}_1^1 = 1 \\ \mathcal{T}_0^1 - \mathcal{T}_1^1 = \frac{1}{n} \end{array}\right\}$$

e substituindo na equação (4.13) obtemos a solução

$$\mathcal{P}^{(1)}(x) = \frac{n+1}{2n} x + \frac{n-1}{2n} \bar{x}.$$

De realçar, que para esta função linear monogénica monomial com $\mathcal{P}^{(1)}(0) = 0$, $\mathcal{P}^{(1)}(1) = 1$, a derivada hipergeométrica

$$\frac{1}{2}\bar{D}\mathcal{P}^{(1)}(x) := \mathcal{P}^{(1)'}(x) = \frac{n+1}{2n} + \frac{n-1}{2n} = 1 = \mathcal{P}^{(0)}(x),$$

é obtida como em $\mathbb{C}$, $\frac{d}{dz}z = 1$. Isto sugere a seguinte questão:

Será possível definir, em geral, o conjunto de todos os $\left\{\mathcal{T}_s^k\right\}_{s=0}^k$, *para* $k = 1, 2, \ldots,$ *de tal modo que temos, não apenas* $\mathcal{P}^{(0)}(x) = 1$, $\mathcal{P}^{(k)}(0) = 0$, $\mathcal{P}^{(k)}(1) = 1$, *mas também*

$$\mathcal{P}^{(k)'}(x) = k\mathcal{P}^{(k-1)}(x), \tag{4.16}$$

generalizando assim a regra de potência da diferenciação complexa na forma $\frac{d}{dz}z^k = kz^{k-1}$*?*

A resposta é afirmativa e permite, quase automaticamente, gerar funções monogénicas, com propriedades herdadas numa forma não trivial de funções holomorfas correspondentes. Por exemplo, no caso $k = 2$, isto é, $\mathcal{P}^{(2)}(x) = \mathcal{T}_0^2 x^2 + \mathcal{T}_1^2 x\bar{x} + \mathcal{T}_2^2 \bar{x}^2$, a propriedade de monogenicidade $D\mathcal{P}^{(2)}(x) = 0$ é equivalente ao sistema determinado

$$\left.\begin{array}{rcl} (1-n)\mathcal{T}_0^2 + \mathcal{T}_1^2 + (1+n)\mathcal{T}_2^2 & = & 0 \\ \mathcal{T}_1^2 - 2\mathcal{T}_2^2 & = & 0 \end{array}\right\}. \tag{4.17}$$

Juntando a condição $\mathcal{P}^{(2)}(1) = 1$, isto é, completando (4.17) com

$$\mathcal{T}_0^2 + \mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_2^2 = 1, \tag{4.18}$$

obtemos como solução do sistema (4.17), os valores

$$\mathcal{T}_0^2 = \frac{3+n}{4n},\ \mathcal{T}_1^2 = \frac{n-1}{2n},\ \mathcal{T}_2^2 = \frac{n-1}{4n},$$

por cálculo directo.

Se estudarmos (4.16), verificamos que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}^{(2)'}(x) & = & \partial_0\mathcal{P}^{(2)}(x) = \partial_0\left(\dfrac{3+n}{4n}x^2 + \dfrac{n-1}{2n}x\bar{x} + \dfrac{n-1}{4n}\bar{x}^2\right) \\ & = & 2\dfrac{3+n}{4n}x + \dfrac{n-1}{2n}\bar{x} + \dfrac{n-1}{2n}x + 2\dfrac{n-1}{4n}\bar{x} \\ & = & \dfrac{n+1}{n}x + \dfrac{n-1}{n}\bar{x} = 2\mathcal{P}^{(1)}(x). \end{array}$$

No caso $n = 3$, a determinação do sistema de equações algébricas que define $\mathcal{T}_s^k$ para uma dimensão arbitrária $n \geq 2$ e o grau homógeneo geral k, $k \geq 2$, na forma como descrevemos anteriormente, é bastante tedioso.

Em vez de usarmos a condição de monogenicidade na forma das equações de Cauchy-Riemann $D\mathcal{P}^{(k)}(x)$, juntamente com a condição $\mathcal{P}^{(k)}(1) = 1$, usaremos a expressão canónica de $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ em termos das variáveis hipercomplexas $z_k = x_k - x_0 e_k$, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Como já vimos anteriormente, $P^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{k} T_s^k x^{k-s}\bar{x}^s$ é monogénica e a extensão de Cauchy-Kowalevskaya de $P^{*(k)}(\vec{x})$ é igual a

$$P^{*(k)}(\vec{x}) = P^{(k)}(\vec{z}) = c^k \sum_{|\mu|=k} z_1^{\mu_1} \times z_2^{\mu_2} \times \ldots \times z_n^{\mu_n} \cdot \binom{k}{\mu} e_1^{\mu_1} \times e_2^{\mu_2} \times \ldots \times e_n^{\mu_n},$$

$$\text{onde } c^k = \begin{cases} \dfrac{(k+1)!!}{k!!} & \text{se} \quad k \text{ é par,} \\[2ex] \dfrac{k!!}{(k-1)!!} & \text{se} \quad k \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{4.19}$$

Aplicando (4.19), a condição $\mathcal{P}^{(k)}(1) = 1$ implica que

$$c^k = \left[\sum_{|\mu|=k} (-1)^k \binom{k}{\mu} \left(e_1^{\mu_1} \times \ldots \times e_n^{\mu_n}\right)^2 \right]^{-1}, \tag{4.20}$$

dando a expressão explícita do c^k, definido exclusivamente em função do valor inicial $\mathcal{P}^{(k)}(1) = = 1$ para todo k. Escolhendo os valores de $\mathbf{c}^k$ na forma (4.20), verificamos que os $\mathcal{T}_s^k$ têm de ser soluções da equação

$$\mathcal{T}_0^k - \mathcal{T}_1^k + \ldots + (-1)^k \mathcal{T}_k^k = \mathbf{c}^k. \tag{4.21}$$

Como vemos a seguir, a equação (4.21) pode ser usada como uma das equações independentes de um sistema algébrico de ordem $k+1$ para determinar os desconhecidos $\mathcal{T}_s^k$. As outras k equações podem ser obtidas da seguinte forma. Uma vez que $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ é monogénico, significa que a derivada $\mathcal{P}^{(k)\prime}(x)$ coincide com a derivada parcial $\partial_0 \mathcal{P}^{(k)}$ e como exigimos em (4.16), a regra de potência será cumprida, isto é, $\partial_0 \mathcal{P}^{(k)}(x) = k\mathcal{P}^{(k-1)}(x)$. Com base em (4.9), terminamos com

$$\sum_{s=0}^{k-1} \left[\mathcal{T}_s^k (k-s) + \mathcal{T}_{s+1}^k (s+1) \right] x^{k-1-s}\bar{x}^s = k \sum_{s=0}^{k-1} \mathcal{T}_s^{k-1} x^{k-1-s}\bar{x}^s. \tag{4.22}$$

Uma vez que as potências da forma $x^{k-1-s}\bar{x}^s$ são linearmente independentes sobre o corpo dos números reais, podemos comparar as expressões de ambos os lados de (4.22) e obter um sistema de k equações que relaciona $k+1$ valores de $\mathcal{T}_s^k$, para $s = 0, 1, \ldots, k$, com os k valores de $\mathcal{T}_r^{k-1}$, $r = 0, 1, \ldots, k-1$. Mais precisamente, obtemos o sistema de equações

$$\left.\begin{array}{rcl} k \cdot \mathcal{T}_0^k + 1 \cdot \mathcal{T}_1^k & = & k \cdot \mathcal{T}_0^{k-1} \\ (k-1) \cdot \mathcal{T}_1^k + 2 \cdot \mathcal{T}_2^k & = & k \cdot \mathcal{T}_1^{k-1} \\ & \vdots & \\ 1 \cdot \mathcal{T}_{k-1}^k + k\mathcal{T}_k^k & = & k \cdot \mathcal{T}_{k-1}^{k-1} \end{array}\right\} \tag{4.23}$$

o qual, juntamente com (4.21), tem que ser cumprido pelos $\mathcal{T}_s^k$, para termos uma função monomial monogénica $\mathcal{P}^{(k)}(x)$. Logo, mostraremos para isso que (4.21) e (4.23) formam um sistema $(k+1) \times (k+1)$ bem definido de equações lineares algébricas e então permitem determinar recursivamente os valores $\mathcal{T}_0^k, \mathcal{T}_1^k, \ldots, \mathcal{T}_k^k$, se os valores de $\mathcal{T}_0^{k-1}, \mathcal{T}_1^{k-1}, \ldots, \mathcal{T}_{k-1}^{k-1}$ e $\mathbf{c}^k$ forem conhecidos. De facto, é fácil vermos que a matriz correspondente é

$$M = \left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{k-1} & (-1)^k \\ k & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & 3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & k \end{array}\right\},$$

a qual não é singular, uma vez que

$$det(M) = k!2^k.$$

Para verificarmos, temos de desenvolver sucessivamente o determinante em relação aos elementos da primeira coluna.

Já vimos que a construção proposta de funções especiais $\mathcal{P}^k(x)$ não é restricta a uma dimensão especial. Em relação ao grau de homogenicidade k segue um esquema recursivo. Consideramos o caso especial $n = 2$. Após alguma manipulação, podemos verificar que os valores explícitos de $\mathcal{T}_s^k$ e $\mathbf{c}^k$, são dados por

$$\mathcal{T}_s^k = \frac{1}{k+1} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_{k-s} \left(\frac{1}{2}\right)_s}{(k-s)!s!}$$

e

$$\mathbf{c}^k = \begin{cases} \dfrac{(k-1)!!}{k!!} & \text{se} \quad k \text{ é par,} \\ \\ \dfrac{k!!}{(k+1)!!} & \text{se} \quad k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Prova:

Com base na Propriedade 4.2.1, para $n=2$, podemos observar que

$$\begin{aligned}(k-s)\mathcal{T}_s^k + (s+1)\mathcal{T}_{s+1}^k &= \frac{k+1}{(k-s-1)!s!}\frac{1}{k+1}\left(\frac{3}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{1}{2}\right)_s \\ &= \frac{k}{k}\frac{1}{(k-s-1)!s!}\left(\frac{3}{2}\right)_{k-s-1}\left(\frac{1}{2}\right)_s = k\mathcal{T}_s^{k-1}.\end{aligned}$$

Assim, a partir da expressão (4.9) do Lema 4.3.1, a derivada de $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ em relação a x_0 é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\mathcal{P}^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{k-1} x^{k-s-1}\bar{x}^s\left((k-s)\mathcal{T}_s^k + (s+1)\mathcal{T}_{s+1}^k\right) = \sum_{s=0}^{k-1} x^{k-s-1}\bar{x}^s k\mathcal{T}_s^{k-1} = k\mathcal{P}^{(k-1)}(x).$$

Pela Propriedade 4.2.7 temos que para os antigos T_s^k

$$c^k = \begin{cases} \dfrac{(k+1)!!}{k!!} & \text{se} \quad k \text{ é par,} \\ \\ \dfrac{k!!}{(k-1)!!} & \text{se} \quad k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Para obter os $\mathcal{T}_s^k$ (novos), basta multiplicar os T_s^k (antigos) por $\frac{1}{k+1}$, então

$$\mathbf{c}^k = \begin{cases} \dfrac{(k+1)!!}{k!!(k+1)} = \dfrac{(k-1)!!}{k!!} & \text{se} \quad k \text{ é par,} \\ \\ \dfrac{k!!}{(k-1)!!(k+1)} = \dfrac{k!!}{(k+1)!!} & \text{se} \quad k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

$\blacksquare$

Os primeiros $\mathcal{P}^{(k)}(x)$, segundo Falcão, Cruz e Malonek em [9], são:

k	$\mathbf{c}^k$	$\mathcal{T}_s^k$	$\mathcal{P}^{(k)}(x)$
0	1	$\mathcal{T}_0^0 = 1$	$\mathcal{P}^{(0)}(x) = 1$
1	$\frac{1}{2}$	$\mathcal{T}_0^1 = \frac{3}{4}$	$\mathcal{P}^{(1)}(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\bar{x}$
		$\mathcal{T}_1^1 = \frac{1}{4}$	$\mathcal{P}^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1e_1 + z_2e_2) = \frac{1}{2}(e_1z_1 + e_2z_2)$
2	$\frac{1}{2}$	$\mathcal{T}_0^2 = \frac{5}{8}$	$\mathcal{P}^{(2)}(x) = \frac{5}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\bar{x} + \frac{1}{8}\bar{x}^2$
		$\mathcal{T}_1^2 = \frac{1}{4}$	$\mathcal{P}^{(2)}(z_1, z_2) = -\frac{1}{2}\left(z_1^2 + z_2^2\right)$
		$\mathcal{T}_2^2 = \frac{1}{8}$	
3	$\frac{3}{8}$	$\mathcal{T}_0^3 = \frac{35}{64}$	$\mathcal{P}^{(3)}(x) = \frac{35}{64}x^3 + \frac{15}{64}x^2\bar{x} + \frac{9}{64}x\bar{x}^2 + \frac{5}{64}\bar{x}^3$
		$\mathcal{T}_1^3 = \frac{15}{64}$	$\mathcal{P}^{(3)}(z_1, z_2) = -\frac{3}{8}\left(z_1^3e_1 + z_1^2 \times z_2e_2 + z_1 \times z_2^2e_1 + z_2^3e_2\right)$
		$\mathcal{T}_2^3 = \frac{9}{64}$	$= -\frac{3}{8}\left(e_1z_1^3 + e_2z_1^2 \times z_2 + e_1z_1 \times z_2^2 + e_2z_2^3\right)$
		$T_3^3 = \frac{5}{64}$	

Tabela 4.1: Polinómios $\mathcal{P}^{(k)}(x)$; k=0, 1, 2, 3.

Apresentamos como uma aplicação outra função que generaliza, em algum sentido, a função complexa exponencial. A função exponencial pode ser escrita como série hipergeométrica na forma $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = {}_0F_0\,[z]$. Uma vez que $\mathcal{P}^{(k)\prime}(x) = k\mathcal{P}^{(k-1)}(x)$, propomos para $n = 2$, a seguinte função exponencial

$$\varepsilon_3(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{P}^{(k)}(x)}{k!}, \tag{4.24}$$

substituindo z^k por $\mathcal{P}^{(k)}(x)$.

Teorema 4.5.1 *[9] A função exponencial (4.24) tem as propriedades:*

1. $D\varepsilon_3(x) = \varepsilon_3(x)D = 0,\ x \in \mathbb{R}^3$;
2. $\varepsilon_3'(\lambda x) = \lambda\varepsilon_3(\lambda x),\ \lambda \in \mathbb{R}^3$;
3. $\varepsilon_3(x_0, 0, 0) = e^{x_0},\ x_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

A propriedade 1 surge por construção. As outras propriedades seguem da homogenicidade de $\mathcal{P}^{(k)}(x)$. De facto,

$$\mathcal{P}^{(k)}(\lambda x) = \lambda^k \mathcal{P}^{(k)}(x),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

e então

$$\varepsilon_3(\lambda x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathcal{P}^{(k)}(x)}{k!}.$$

Recordando que $\mathcal{P}^{(k)}(1) = 1$ e $\mathcal{P}^{(k)'}(x) = k\mathcal{P}^{(k-1)}(x)$, obtemos

$$\varepsilon_3(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda},\ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

e

$$\varepsilon_3'(\lambda x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}\mathcal{P}^{(k-1)}}{(k-1)!} = \lambda\varepsilon_3(\lambda x),\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

■

Do mesmo modo passamos agora para a aplicação dos polinómios $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ na generalização de alguns polinómios ortogonais. Como já vimos no ponto 2.2 o polinómio associado de Laguerre pode ser escrito

$$L_n^{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k}\frac{z^k}{k!} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_1F_1\left[-n; \alpha+1; z^k\right].$$

É possível obter uma generalização substituindo z^k por $\mathcal{P}^{(k)}(x)$

$$\mathcal{L}_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k}\frac{\mathcal{P}^{(k)}(x)}{k!} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_1F_1\left[-n; \alpha+1; \mathcal{P}^{(k)}(x)\right].$$

Os $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ são polinómios homogéneos, isto é, $\mathcal{P}^{(k)}(tx) = t^k\mathcal{P}^{(k)}(x),\ t > 0$. Para $x = 1$, $\mathcal{P}^{(k)} = 1,\ k = 0,\ 1, \ldots$ o que implica que $\mathcal{P}^{(k)}(t) = t^k\mathcal{P}^{(k)}(1) = t^k$. Assim, $\mathcal{L}_n^{\alpha}(x)|_{\underline{x}=0} =$ $= \mathcal{L}_n^{\alpha}(x_0) = L_n^{\alpha}(x_0)$ e $0 \leq x_0 \leq \infty$. Quando restringimos x a x_0 no polinómio associado de Laguerre $\mathcal{L}_n^{\alpha}(x)$ obtemos o polinómio ordinário $L_n^{\alpha}(x)$.

No ponto (2.2) vimos que o polinómio associado de Laguerre satisfaz a equação diferencial

$$z\left(L_n^{\alpha}(z)\right)'' + (1+\alpha-z)\left(L_n^{\alpha}(z)\right)' + nL_n^{\alpha}(z) = 0.$$

Uma equação análoga que utiliza em vez da derivada ordinária a derivada hipercomplexa e substitui $L_n^{\alpha}(z)$ por $\mathcal{L}_n^{\alpha}(x)$ é da forma

$$\mathcal{P}^{(1)}(x)\left(\mathcal{L}_n^{\alpha}(x)\right)'' + \left(1+\alpha-\mathcal{P}^{(1)}(x)\right)\left(\mathcal{L}_n^{\alpha}(x)\right)' + n\mathcal{L}_n^{\alpha}(x) = 0.$$

Porém esta não se verifica, uma vez que sugere uma relação de um produto de dois polinómios $\mathcal{P}^{(k)}(x)$ da forma $\mathcal{P}^{(k)}(x)\mathcal{P}^{(l)}(x) = \mathcal{P}^{(k+l)}(x)$. Por isso será necessário encontrarmos uma outra equação diferencial que tem como solução os polinómios $\mathcal{L}_n^{\alpha}(x)$, mas este problema ultrapassou o objectivo deste trabalho.

Conclusão

As séries hipergeométricas são de bastante relevo na Matemática. Estas generalizam muitas funções especiais, incluindo a: exponencial, logarítmica, trigonométrica, binomial e as funções de Bessel; não deixando de parte os polinómios ortogonais de Legendre, Chebyshev, Laguerre, Hermite, entre outros.

A série de Gauss foi o ponto de partida para o estudo das séries hipergeométricas generalizadas, pois estas resultam da extensão do seu número de parâmetros. A identificação de uma série como hipergeométrica provém da extracção do factor comum, termo correspondente a $n = 0$ e simplificação do quociente entre dois termos consecutivos.

As identidades e teoremas analisados no primeiro capítulo permitem a simplificação de algumas séries hipergeométricas. O Teorema de Chu-Vandermonde é referente a uma soma finita. A primeira identidade de Euler foi a base para a demonstração do Teorema de Pfaff-Saalschütz e quando o limite $n \to \infty$ traduz-se no Teorema de Gauss. Por sua vez, este último pode traduzir-se no Teorema de Chu-Vandermonde. No Teorema de Kummer, a série somada é a mais simples série bem equilibrada. O Teorema de Dixon pode reduzir-se ao Teorema de Kummer. O Teorema de Dougall traduz a simplificação de uma série bem equilibrada composta por vários parâmetros. A primeira e segunda identidades de Euler expressam numa série hipergeométrica, o produto de uma série binomial com outra série hipergeométrica. O mesmo se processa com a identidade de Kummer, com a série exponencial. A série de Clausen expressa o quadrado de uma série hipergeométrica, o qual é traduzido numa série hipergeométrica.

O estudo das equações diferenciais que satisfazem a série de Gauss e a série hipergeométrica generalizada contribuiram para uma visão diferente sobre a teoria das séries hipergeométricas. Este permitiu a determinação de séries que satisfaçam uma equação, desde que consigamos que os pesos dos termos mais pesados sejam 0 e -1, onde o peso do termo $z^n\delta^m$ é $n-m$. A determinação de uma equação satisfeita por uma série foi tratada de acordo com o Teorema 2.1.2. Podemos verificar que se a variável aparecer como uma combinação da variável z, a determinação da equação através do teorema é mais complexa ou mesmo impossível. Tal reflectiu-se na secção referente aos polinómios ortogonais, onde apenas conseguimos determinar através do teorema, a equação diferencial satisfeita pelo polinómio associado de Laguerre.

As séries hipergeométricas foram generalizadas por Appell, para duas variáveis. A teoria demorou a emergir, pois o trabalho com mais de uma variável torna-se complexo. Todavia não deixámos de parte o estudo da convergência e das equações diferenciais satisfeitas por estas séries duplas. A investigação realizada por Lauricella (a extensão a múltiplas somas) torna-se ainda mais complexa do que as séries de Appell.

No terceiro capítulo estudámos a Análise de Clifford onde definimos a sua álgebra, associativa mas não comutativa. Embora tenhamos usado uma abordagem relativamente elementar na generalização, foram várias as dificuldades sentidas na utilização de uma álgebra não comutativa. A abordagem de Cauchy está relacionada com o conceito de diferenciabilidade complexa. Para generalizarmos a abordagem de Cauchy, na teoria das funções hipercomplexas, considerámos a estrutura da aplicação linear $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^n; \mathcal{C}\ell_{0,n})$. Assim, apresentámos a definição de derivada hipercomplexa à direita e à esquerda.

O estudo das funções monogénicas em termos de x e $\bar{x}$, ou seja, dos $P^{(k)}(x)$ conduziu-nos à análise de propriedades dos T_s^k e à derivada hipercomplexa dos $P^{(k)}(x)$. Obtemos os $P^{(k)}(x)$ para $n=2$, em termos de z_1 e z_2 com o auxílio da extensão de Cauchy-Kowalewskaya. Houve necessidade de determinar novos T_s^k e c^k de modo a que $P^{(k)\prime}(x) = kP^{(k-1)}(x)$. Após este resultado, proposemos uma função que generaliza, em algum sentido, a função complexa exponencial usando os polinómios $P^{(k)}(x)$ e pelo que passámos à aplicação destes na generalização do polinómio associado de Laguerre. Em particular, num trabalho futuro, será interessante obter a equação diferencial hipercomplexa que terá como solução o polinómio associado de Laguerre. As funções monogénicas foram analisadas em alguns casos, somente para $n=2$, tendo por certo que se verifica para um n qualquer, ou seja, para dimensões superiores. Este trabalho resume-se a um estudo inicial, pois face à exígua literatura/investigação sobre este tema, muito poderá ainda ser desenvolvido.

A redacção desta dissertação revelou-se um desafio, pois, para além da revisão de conceitos, teorias com referências aos seus diversos autores, apresentámos novas conclusões. Num tratamento mais extenso teriamos certamente resultados mais gerais para outras dimensões e classes de funções. Um trabalho sistemático e mais pormenorizado, projectaria novos caminhos na Análise de Clifford. Mas toda a teoria das séries é um assunto que necessita de métodos adequados para ser bem sucedida, o que exige um software adequado.

Termino este trabalho com a seguinte citação:

"A Matemática é a rainha das ciências
e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática."
Carl Friedrich Gauss

Apêndice A

Funções representadas por séries hipergeométricas

Muitas das funções elementares têm representação como série hipergeométrica. Com base nas séries ordinárias que constam em [5] apresentamos alguns exemplos:

Série geométrica

- $1 + z + z^2 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = {}_1F_0\left[1; z\right].$

Série binomial com expoente positivo

- $(1+z)^m = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_n^m z^n = {}_1F_0\left[-m; -z\right], \ m > 0, \ |z| \leq 1.$

- $(1-z)^m = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{C}_n^m z^n = {}_1F_0\left[-m; z\right], \ m > 0, \ |z| \leq 1.$

Série binomial com expoente negativo

- $(1+z)^{-m} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m)_n}{n!} z^n = {}_1F_0\left[m; -z\right], \; m > 0, \; |z| < 1.$

- $(1-z)^{-m} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m)_n}{n!} z^n = {}_1F_0\left[m; z\right], \; m > 0, \; |z| < 1.$

Funções trigonométricas

- $sen \; z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z \; {}_0F_1\left[\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right], \; |z| < \infty.$

- $\cos \; z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = {}_0F_1\left[\frac{1}{2}; -\frac{z^2}{4}\right], \; |z| < \infty.$

Função exponencial

- $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = {}_0F_0\left[z\right], \; |z| < \infty.$

Funções logarítmicas

- $\ln z = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)(z+1)^{2n+1}} = 2\frac{z-1}{z+1} \; {}_2F_0\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right], \; z > 0.$

- $\ln z = (z-1)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(n+1)} = (z-1) \; {}_2F_1\left[1, 1; 2; -z+1\right], \; 0 < z \leq 2.$

- $\ln z = (z-1)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n z^{-(n+1)}}{(n+1)} = \frac{z-1}{z} \; {}_2F_1\left[1, 1; 2; \frac{z-1}{z}\right], \; z > \frac{1}{2}.$

- $\ln(1+z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = z \; {}_2F_1\left[1, 1; 2; -z\right], \; -1 < z \leq 1.$

- $\ln(1-z) = -z\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = -z \; {}_2F_1\left[1, 1; 2; z\right], \; -1 \leq z < 1.$

- $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2 \; Arg \; tgh \; z = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = 2z \; {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right], \; |z| < 1.$

- $\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 2\ Arg\ cotgh\ z = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-(2n+1)}}{(2n+1)} = z^{-1}\ {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^{-2}\right],\ |z| > 1.$

Funções trigonométricas inversas

- $arc\ sen\ z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}z^{2n+1} = z\ {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right],\ |z| < 1.$

- $arc\ sen\ (1-z) = \frac{\pi}{2} - (2z)^{\frac{1}{2}}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^{2(n+1)}(2n+3)(n+1)!}z^{n+1}\right]$
$= \frac{\pi}{2} - (2z)^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{z}{12}\ {}_3F_2\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1; \frac{5}{2}, 2; \frac{z}{2}\right]\right],\ |z| < 2.$

- $arc\ cos\ z = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}z^{2n+1} = \frac{\pi}{2} - z\ {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right],\ |z| < 1.$

- $arc\ tg\ z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z\ {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right],\ |z| < 1.$

- $arc\ tg\ z = \pm\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{-(2n+1)}}{2n+1} = \pm\frac{\pi}{2} - z^{-1}\ {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^{-2}\right],\ |z| > 1.$
Toma-se o primeiro termo $\frac{\pi}{2}$ com o sinal "+" para $z > 1$ e com o sinal "$-$" para $z < -1$.

- $arc\ cotg\ z = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} = \frac{\pi}{2} - z\ {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right],\ |z| < 1.$

Funções hiperbólicas

- $senh\ z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z\ {}_0F_1\left[\frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right],\ |z| < \infty.$

- $cosh\ z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \ {}_0F_1\left[\frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right],\ |z| < \infty.$

Funções hiperbólicas inversas

- $Arg\ senh\ z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}z^{2n+1} = z\,{}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right],\ |z| < 1.$

- $Arg\ cosh\ z = \ln(2z) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!2(n+1)} z^{-2(n+1)}$
$= \ln(2z) - \frac{1}{4} z^{-2}\ {}_3F_2 \left[\frac{3}{2}, 1, 1; 2, 2; z^{-2} \right],\ |z| > 1.$

- $Arg\ tgh\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z\ {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2 \right],\ |z| < 1.$

- $Arg\ cotgh\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-(2n+1)}}{(2n+1)} = z^{-1}\ {}_1F_0 \left[\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2} \right],\ |z| > 1.$

Apêndice B

Série de Kampé de Fériet

A série de Kampé de Fériet[1] generaliza a série hipergeométrica generalizada de duas variáveis e inclui como um caso especial a série hipergeométrica de Appell $F_1[a; b, b'; c; x, y]$. A série pode representar derivadas de séries hipergeométricas generalizadas com respeito aos seus parâmetros.

As séries de Kampé de Fériet são escritas na notação

$$F_{q,s,u}^{p,r,t}\left(\begin{array}{c|c|c|c} c_p & a_r & \alpha_t & \\ & & & x, y \\ d_q & b_s & \beta_u & \end{array}\right).$$

Casos especiais,

$$F_{1,0,0}^{1,1,1}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ & & & x, y \\ \frac{3}{2} & - & - & \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} E\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right), \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$$

$$F_{1,0,0}^{1,1,1}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & & x, y \\ \frac{3}{2} & - & - & \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} F\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right), \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$$

[1]O conteúdo do apêndice em questão, tem por base a consulta e análise do site: http://mathworld.wolfram.com (acedido em Fevereiro de 2006).

para $x \neq 0$ e $|x|,\ |y| \leq 1$, onde $E(x,k)$ é o integral elíptico incompleto do segundo tipo e $F(x,k)$ é o integral elíptico incompleto do primeiro tipo, como também

$$F^{1,1,1}_{1,0,0}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \\ & & & x,y \\ 1 & - & - & \end{array}\right) = \frac{2}{\pi}\prod(1;x,\sqrt{y})$$

para $|x|,\ |y| \leq 1$, onde $\prod(n;x,k)$ é o integral elíptico incompleto do terceiro tipo. Identidades adicionais são dadas

$$F^{1+p,r,t}_{q,s,u}\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0,c_p & a_r & \alpha_t & \\ & & & x,y \\ d_q & b_s & \beta_u & \end{array}\right) = 1$$

$$F^{p,r,t}_{q,s,u}\left(\begin{array}{c|c|c|c} c_p & a_r & \alpha_t & \\ & & & x,0 \\ d_q & b_s & \beta_u & \end{array}\right) = F^{p+r}_{q+s}\left(\begin{array}{c|c} c_p,a_r & \\ & x \\ d_q,d_s & \end{array}\right)$$

$$F^{p,r,1+t}_{q,s,u}\left(\begin{array}{c|c|c|c} c_p & a_r & 0,\alpha_t & \\ & & & x,y \\ d_q & b_s & \beta_u & \end{array}\right) = F^{p+r}_{q+s}\left(\begin{array}{c|c} c_p,a_r & \\ & x \\ d_q,d_s & \end{array}\right).$$

Apêndice C

Séries Lauricella

O conceito de séries hipergeométricas duplas pode ser extendido para triplas, quadrúplas ou múltiplas somas, o que torna em geral, os resultados progressivamente mais complicados. Tais séries foram estudadas em primeiro por Lauricella (1893). A teoria das séries múltiplas gerais foi investigada mais completamente por Appell (1926).

Segundo Slater [26], Lauricella definiu quatro séries

$$F_A[a, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n, x_1, x_2, \ldots, x_n]$$
$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(b_1)_{m_1}(b_2)_{m_2}\ldots(b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1}(c_2)_{m_2}\ldots(c_n)_{m_n}(1)_{m_1}(1)_{m_2}\ldots(1)_{m_n}} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

onde, para a convergência,

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| < 1.$$

$$F_B[a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, c, x_1, x_2, \ldots, x_n]$$
$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1}(a_2)_{m_2}\ldots(a_n)_{m_n}(b_1)_{m_1}(b_2)_{m_2}\ldots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(1)_{m_1}(1)_{m_2}\ldots(1)_{m_n}} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

onde, para a convergência

$$|x_1| < 1,\ |x_2| < 1, \ldots, |x_n| < 1.$$

$$F_C[a, b, c_1, c_2, \ldots, c_n, x_1, x_2, \ldots, x_n]$$
$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(b)_{m_1+m_2+\ldots+m_n}}{(c_1)_{m_1}(c_2)_{m_2}\ldots(c_n)_{m_n}(1)_{m_1}(1)_{m_2}\ldots(1)_{m_n}} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

onde, para a convergência

$$|x_1^{\frac{1}{2}}| + |x_2^{\frac{1}{2}}| + \ldots + |x_n^{\frac{1}{2}}| < 1.$$

$$F_D[a, b_1, b_2, \ldots, b_n, c, x_1, x_2, \ldots, x_n]$$
$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(b_1)_{m_1}(b_2)_{m_2}\ldots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(1)_{m_1}(1)_{m_2}\ldots(1)_{m_n}} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

onde, para a convergência

$$|x_1| < 1, \; |x_2| < 1, \ldots, |x_n| < 1.$$

Se $n = 2$, então as séries reduzem-se as séries hipergeométricas de Appell F_2, F_3, F_4 e F_1, respectivamente. Se $n = 1$, as quatro séries tornam-se séries hipergeométricas de Gauss ${}_2F_1$.

Bibliografia

[1] Ablamowicz, R.; Sobczyk, G.; *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications*, Birkhäuser Boston - Basel - Berlin, 2004.

[2] Abramowitz, M.; Stegun, I. A.; *Handbook of Mathematical Functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Publications, 1965.

[3] Andrews, G.; Askey, R.; Roy, R.; Special Functions, *Encyclopedia of Mathematics and its Aplications*, Cambridge University Press,volume 71, 1999.

[4] Bailey, W.; *Generalized Hypergeometric Series*, Stechert Hafner Service Agency, 1964.

[5] Bronstein, I.; Semendiaev, K.; *Manual de Matemática para Engenheiros e Estudantes*, Mir Moscou, 1979.

[6] Carlson, B. C.; *Special Functions of Applied Mathematics*, New york, Academic, 1977.

[7] Cnops, J.; Malonek, H.; *An Introduction to Clifford Analysis*, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 1995.

[8] Delanghe, R.; Sommen, F.; Souček, V.; *Clifford Algebra and Spinor - Valued Functions. A Function Theory for the Dirac Operator*, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[9] Falcão, M.; Cruz, J.; Malonek, H.; *Remarks on the Generation of Monogenic Functions.* K. Gürlebeck and C. Könke, eds. IKM, 17, Weimar, 2006: proceedings http://e-pub.uniweimar.de/volltexte.

[10] Fueter, R.; *Analytische Funktionen einer Quaternionenvariablen*, Comment. Math. Helv. 4 (1932), 9-20.

[11] Fueter, R.; *Uber die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen*, Comment. Math. Helv. 8 (1935-36), 371-378.

[12] Gasper, G.; Rahman, M.; Basic Hypergeometric Series, *Encyclopedia of Mathematics and its Aplications*, Cambridge University Press, Volume 96, 2004.

[13] Grosshans, F.; Rota, G. C.; Stein, J. A.; *Invariant Theory and Superalgebras*, AMS, 1987.

[14] Henrici, P.; *Applied and Computational Complex Analysis*, A Wiley - Interscience Publication, Volume 1, 1974.

[15] Kampé de Fériet Function em http://mathworld.wolfram.com (acedido em Fevereiro de 2006).

[16] Koelink, E.; Assche, W.; Lecture Notes in Mathematics, *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Springer, 2002.

[17] Lebedev, N. N.; *Special Functions and their Applications*, Dover Publications, Inc., 1972.

[18] Magnus, W.; Oberhettinger, R.; Soni, R. P.; *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer, 1966.

[19] Malonek, H.; A New Hypercomplex Structure of the Euclidean Space $\mathbb{R}^{m+1}$ and the Concept of Hypercomplex Differentiability **em:** *Complex Variables*, 1990, Vol. 14, pp. 25-33.

[20] Malonek, H.; Hypercomplex Differentiability and its Applications **em:** F. Brackx et al. (eds.), *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Kluwer Academic Publishers, 1993, 141-150.

[21] Malonek, H.; Power Series Representation for Monogenic Functions in $\mathbb{R}^{m+1}$ Based on a Permutational Product **em:** *Complex Variables*, 1990, Vol. 15, pp. 181-191.

[22] Malonek, H. R.; Selected Topics in Hypercomplex Function Theory **em:** *Clifford Algebras and Potencial Theory*, (ed. Eriksson, S. - L.), University of Joensuu, Report Series 7, (2004), pp. 111-150.

[23] Petrovšek, M.; Wilf, H.; Zeilberger, D., $A=B$, Publishers of science and technology, 1996.

[24] Spanier, J.; Oldham, K.; *An Atlas of Functions*, Hemisphere Publishing Corporation, 1987.

[25] Slater, L. J.; Lit., D.; D., Ph.; *Confluent Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 1960.

[26] Slater, L. J.; *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 1966.

[27] Smirnov, V.; *A Course of Higher Mathematics*, Pergamon Press, Volume III, 1964.

[28] Spiegel, Murray R.; *Variáveis Complexas*, Editora Mc Graw-Hill do Brasil, LTDA, 1977.

[29] Whittaker, E. T.; Watson, G. N.; *A course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1963.